

PROBLEMAS DE INTERACCION TERRENO-ESTRUCTURA

Alarcón Alvarez, Enrique

1.- EL SEMIESPACIO ELASTICO CON CARGA DINAMICA

Numerosos problemas en ingeniería se refieren a la respuesta dinámica del terreno frente a sollicitaciones permanentes o transitorias. Ejemplos típicos son las sacudidas sísmicas, el paso de cargas móviles, la actuación de máquinas con dispositivos alternativos (compactadores, turboalternadores, etc.), etc.

El desarrollo de la mecánica del suelo, así como el interés de mejorar el diseño y garantizar la seguridad de las estructuras afectadas han conducido al desarrollo de un cuerpo de doctrina homogéneo y riguroso para el tratamiento de problemas como los citados.

Obsérvese que, en general, ni el terreno ni la estructura sobre él construida se pueden estudiar por separado. Hay una verdadera interacción entre ambos y ella es precisamente la motivación del problema.

1.1.--Desarrollo histórico (*). Vibraciones verticales en régimen permanente.

En los años 30, la Deutschen Forschungsgesellschaft für Bodenmechanik (DEGEBO) pretendía desarrollar un vibrador que permitiese la determinación de las características dinámicas del suelo. El soporte teórico fue encomendado a REISSNER que publicó su análisis en 1936.

El vibrador a utilizar era el característico de masas excéntricas en un

(*) Una magistral introducción puede verse en el libro de RICHARDT et al. (1970) cap. 7 a cuya influencia es difícil sustraerse.

marco rígido. Por ello el modelo de estructura utilizado por REISSNER consistía en una masa rígida que, sin separarse del suelo, inducía en él un desplazamiento alternativo, constante en la zona de contacto.

La forma de ésta última estaba dictada por conveniencias de cálculo; en efecto la adopción de una base circular permite plantear un problema con simetría axial lo que facilita el desarrollo matemático posterior.

Respecto al suelo, el modelo utilizado fue el semiespacio elástico, homogéneo e isótropo como lógica generalización de los usos habituales en los problemas estáticos de mecánica del suelo.

Las presiones en la interfase pueden así calcularse si se es capaz de resolver el problema de la Fig. 1.

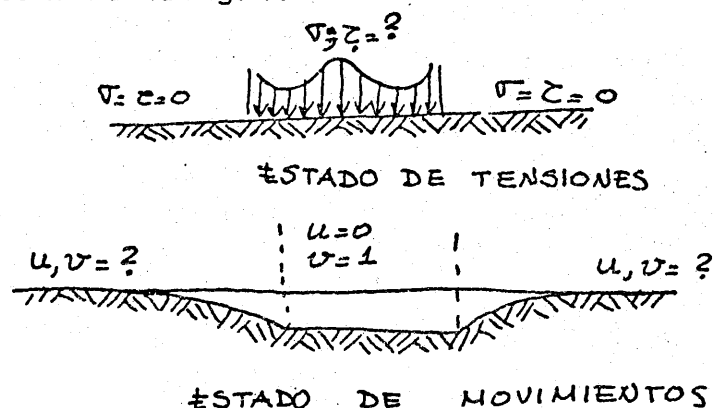


Fig.1

Como se ve se trata de un problema mixto que conduce a un sistema de ecuaciones integrales para las que REISSNER no disponía de ningún método de resolución.

Su alternativa consistió en simplificar la situación suponiendo una ley para la distribución de presiones en la zona de contacto, lo que implica el inmediato incumplimiento de las condiciones de compatibilidad de deformación con la hipótesis de movimiento rígido. En particular el problema de REISSNER consiste en la determinación de la respuesta de un semiespacio sometido a unas tensiones

$$\sigma_z = \frac{P_0}{\pi r_0^2} e^{i\omega t} \quad (1)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

en una zona circular de radio r_o .

El resultado se consigue mediante el uso de las funciones de GREEN para el semiespacio (calculadas por LAMB en su famoso trabajo de 1904), y para el movimiento del punto situado en el eje de simetría fue presentada en la forma

$$w = \frac{P_o e^{i\omega t}}{G r_o} (f_1 + i f_2) \quad (2)$$

donde:

P_o es la resultante de las tensiones verticales de contacto
 G es el módulo de rigidez del terreno
 r_o es el radio de la interfase
 f_1, f_2 ó "funciones de REISSNER", son expresiones complicadas en las que interviene la frecuencia de excitación y las características del suelo G y ν (coeficiente de Poisson)

Mediante la expresión (2) es posible calcular la respuesta del sistema vibrador-suelo. En efecto si la masa de aquél es m y se admite la hipótesis de movimiento rígido (incompatible, según se dijo, con la distribución de presiones supuesta) el equilibrio dinámico exige

$$m \ddot{w} + P_o e^{i\omega t} = Q_o e^{i\omega t} \quad (3)$$

donde Q_o es la fuerza que provoca la vibración.

Como $\ddot{w} = -\omega^2 w$

$$(-m\omega^2 + \frac{G r_o}{f_1 + i f_2}) w = Q_o e^{i\omega t} \quad (4)$$

y suponiendo

$$w = A e^{i\omega t}$$

$$A = \frac{Q_o (f_1 + i f_2)}{(-m\omega^2 f_1 + G r_o) - i m f_2 \omega^2}$$

o bien

$$A = \frac{Q_o (f_1 + i f_2) [(-m\omega^2 f_1 + G r_o) + i m f_2 \omega^2]}{(-m\omega^2 f_1 + G r_o)^2 + (m f_2 \omega^2)^2} \quad (5)$$

Con objeto de obtener resultados de validez general REISSNER introdujo los parámetros adimensionales de frecuencia y masa siguientes

$$\begin{aligned} a_o &= \frac{\omega r_o}{c_s} \\ b &= \frac{m}{\rho r_o^3} \end{aligned} \quad (6)$$

donde c_s es la celeridad de las ondas de distorsión en el medio considerado

$$c_s = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

siendo ρ la masa específica del mismo.

Obsérvese que, puesto que $\omega = \frac{2\pi}{T}$

$$a_o = 2\pi \frac{r_o}{T c_s} = \pi \frac{2 r_o}{\lambda_s} \quad (7)$$

donde λ_s sería la longitud de onda. En este sentido a_o puede interpretarse como un parámetro que relaciona el tamaño relativo de la placa ($2 r_o$) y la longitud de onda (λ_s) de frecuencia ω .

Obsérvese también que

$$m \omega^2 = (\rho r_o^3 b) \left(\frac{a_o^2}{r_o^2} \frac{G}{\rho} \right) = (a_o^2 b) G r_o \quad (8)$$

que al ser sustituida en (5) conduce a la expresión

$$A = \frac{Q_o}{G r_o} \frac{(f_1 + i f_2) (1 - a_o^2 b f_1) + i a_o^2 b f_2}{(1 - a_o^2 b f_1)^2 + (a_o^2 b f_2)^2} \quad (9)$$

cuyo módulo es, evidentemente,

$$|A| = \frac{Q}{G r_o} \frac{f_1^2 + f_2^2}{\sqrt{(1 - a_o^2 b f_1)^2 + (a_o^2 b f_2)^2}} \quad (10)$$

y cuyo ángulo de fase ψ se puede obtener a partir de los parciales de los dos elementos del numerador de (9). Así

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{\frac{f_2}{f_1} + \frac{a_o^2 b f_2}{1 - a_o^2 b f_1}}{-1 + \frac{f_2}{f_1} \frac{a_o^2 b f_2}{1 - a_o^2 b f_1}} = \frac{f_2}{-f_1 + a_o^2 b (f_1^2 + f_2^2)} \quad (11)$$

Obtenidas ambas expresiones es inmediato calcular la potencia requerida por el movimiento o cualquier otra cantidad de interés.

Los resultados de REISSNER no coincidieron con los ensayos de la -- DEGEBO. Entre las razones conviene recordar:

- a) La hipótesis de distribución uniforme de tensiones verticales.
- b) La hipótesis de tensiones tangenciales nulas.
- c) La hipótesis de invarianza con la frecuencia de a) y b).

Asimismo SHEKHTER (1948) demostró la existencia de un error de signo en los cálculos que influía en los resultados de forma importante y, según RICHARDT (1970) en los ensayos se utilizaron aceleraciones muy fuertes (del orden de 2 ó 3g) con lo que se perdía el contacto entre vibrador y terreno alterando por completo las hipótesis de partida.

El renacimiento de la idea de REISSNER se produjo en el "Fifty-Six - Annual Meeting of the American Society for Testing Materials" (1953) con los artículos de QUINLAN Y SUNG que relajaron la hipótesis a) resolviendo varios casos con diferentes distribuciones de presión. La mas interesante es la que corresponde a la distribución del caso estático

$$\sigma_z = \frac{P_o e^{i\omega t}}{2\pi r_o \sqrt{r_o^2 - r^2}} \quad (12)$$

Tras una serie de mejoras introducidas por BYCROFT (1956) RICHART presentó en 1962 los gráficos de la figura, en función de parámetros adimensionales

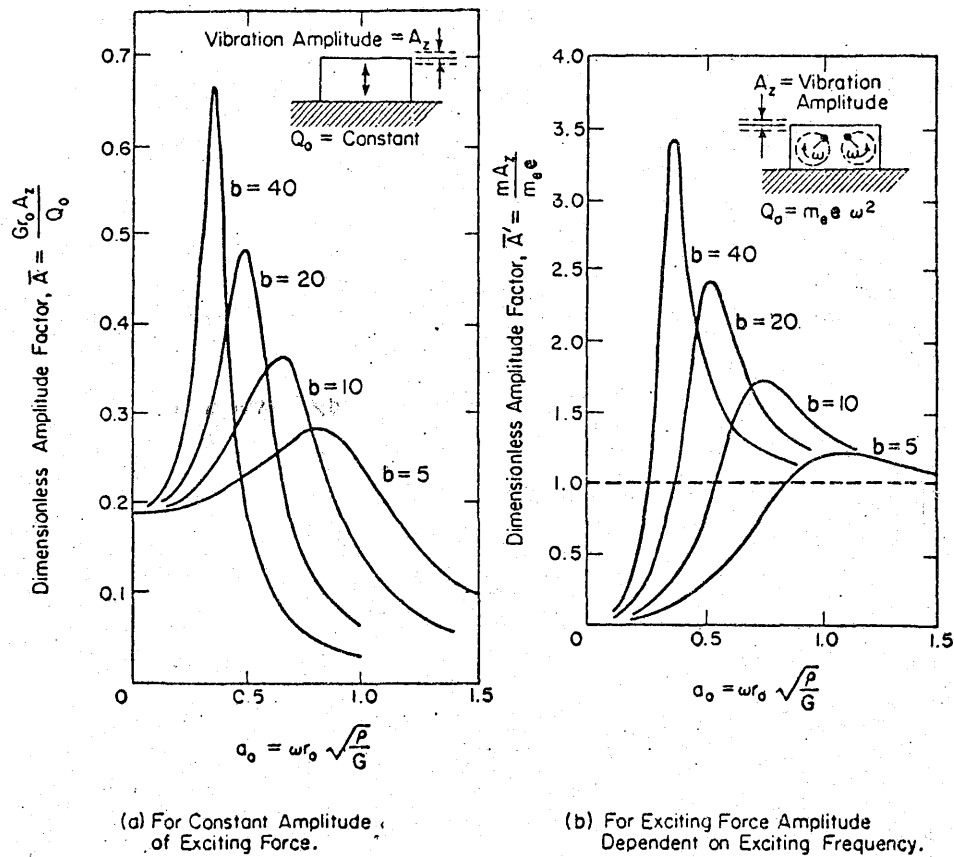


Fig. 2

La fuerte semejanza de estos gráficos con los resultados, bien conocidos, de un sistema amortiguado con un grado de libertad, indujeron a HSIEH (1962) el siguiente esquema mental: derivando (2)

$$\dot{w} = i \omega w \quad (13)$$

pero

$$\begin{aligned} P_o e^{i \omega t} &= \frac{G r_o w}{f_1^2 + f_2^2} (f_1 - i f_2) = \\ &= G r_o \left(\frac{f_1}{f_1^2 + f_2^2} w - \frac{f_2}{f_1^2 + f_2^2} i w \right) \end{aligned} \quad (14)$$

de modo que, usando (13) en el segundo sumando del paréntesis

$$P_o e^{i\omega t} = \left(G r_o \frac{f_1}{f_1^2 + f_2^2} \right) w - \left(\frac{G r_o}{w} \frac{f_2}{f_1^2 + f_2^2} \right) \dot{w} \quad (15)$$

que al ser introducido en (3) conduce a (16)

$$m \ddot{w} + \left(G r_o \frac{f_1}{f_1^2 + f_2^2} \right) w + \left(\frac{G r_o}{w} \frac{-f_2}{f_1^2 + f_2^2} \right) \dot{w} = Q_o e^{i\omega t}$$

en total analogía con la ecuación del movimiento en sistemas con un grado de libertad (g.d.l.). Ello conduce a la definición de unos factores de rigidez y amortiguamiento equivalentes en la forma

$$\begin{aligned} k_{eq} &= G r_o \frac{f_1}{f_1^2 + f_2^2} \\ c_{eq} &= G r_o \frac{-f_2}{f_1^2 + f_2^2} \end{aligned} \quad (17)$$

que clarifican por completo la interpretación de (2). Allí veíamos que la respuesta w a la carga $P_o e^{i\omega t}$ tenía dos partes: una en fase gobernada por f_1 y otra desfasada 90° gobernada por f_2 . (17) pone en evidencia - que el significado de este desfase es el del clásico amortiguamiento. Puesto que el terreno es el semiespacio elástico ideal dicho amortiguamiento sólo puede corresponder a la pérdida por radiación de energía desde la zapata al borde del terreno. Como éste está situado en el infinito no se producen reflexiones y la energía se pierde.

En f_1 se recogen las contribuciones en fase, es decir las provocadas - tanto por las reacciones elásticas como por las de inercia del terreno. K_{eq} recoge pues ambas influencias y ello explica la sorprendente aparición de valores K_{eq} negativos en las bandas de frecuencias muy altas.

Obsérvese, finalmente, que tanto f_1 como f_2 dependen de a_o y v por lo que sería del mayor interés clarificar la influencia de estos parámetros. En la figura (3a) se recogen los valores propuestos por BYCROFT.

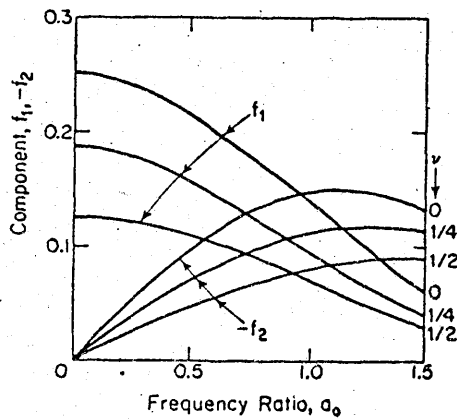


Fig. 3.a.

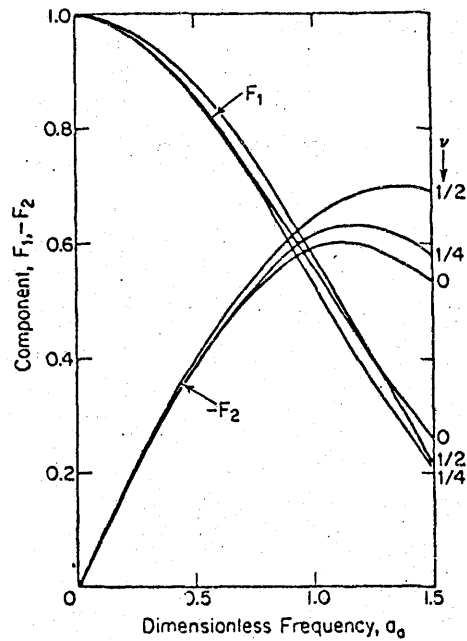


Fig. 3.b

El comportamiento en el origen es lógico pues corresponden al caso estático. Como es sabido (vg. TIMOSHENKO 1) la flecha estática en una zapata rígida sometida a la carga P_o es

$$w_{st} = \frac{P_o (1-\nu)}{4 Gr_o} \quad (18)$$

comparando con (2) se puede escribir

$$w_{st} = \frac{P_o}{Gr_o} f_1 \Big|_0 \longrightarrow f_1 \Big|_0 = \frac{1-\nu}{4}$$

con los valores

$$\begin{aligned} \nu &= 0 & f_1 &= \frac{1}{4} = 0.25 \\ \nu &= \frac{1}{4} & f_1 &= \frac{3}{16} = 0.188 \\ \nu &= \frac{1}{2} & f_1 &= \frac{1}{8} = 0.125 \end{aligned}$$

que coinciden con los valores de la Fig 3.a.

Asimismo

$$\frac{w}{w_{st}} = e^{i\omega t} \frac{4}{1-\nu} (f_1 + i f_2) \quad (19)$$

Siguiendo la tradición del sistema con un g.d.l. sería pues lógico dibujar las curvas

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{4}{1-\nu} f_1 \\ F_2 &= \frac{4}{1-\nu} f_2 \end{aligned} \quad (20)$$

ya que son ellas las que controlan realmente la respuesta, y, en forma congruente definir un índice modificado de masa

$$B = \frac{1-\nu}{4} \quad b = \frac{1-\nu}{4} \frac{m}{\rho r_o^3} \quad (21)$$

Ello fue realizado por LYSMER (1966) con el resultado de la Fig. 3.b. En ellas se aprecia que, a todos los efectos prácticos, la influencia de ν queda recogida con el factor $\frac{1-\nu}{4}$ y por ello basta disponer de la variación de las F con ν .

La contribución de LYSMER no se limitó a esta simplificación sino que, reconociendo las limitaciones de los valores de BYCROFT, elaboró -- otros nuevos utilizando una técnica interesante. La placa se supone dividida en elementos anulares sobre los que la presión σ_2 se mantiene constante. Si existen n anillos y por w_{ij} se designa la deflexión en la línea media del anillo i cuando en el eje j se aplica una presión uniforme unidad manteniendo nulas las demás, es posible escribir un sistema de ecuaciones.

$$\sum_{j=1}^n w_{ij} P_j = w_o \quad i, j = 1, 2, \dots, n, \quad (22)$$

donde P_j son valores aproximados de la presión de interfase en los anillos j y w_o es la traslación de sólido rígido común a todos los anillos. Las w_{ij} se calculan con el método de LAMB y las P_j por resolución del sistema (22) tras dar a w_o un valor convencional, vg unidad. La suma de las P conduce al valor de P_o y el cociente w_o/P_o conduce a los valores F_1 , y F_2 tras eliminar el factor estático.

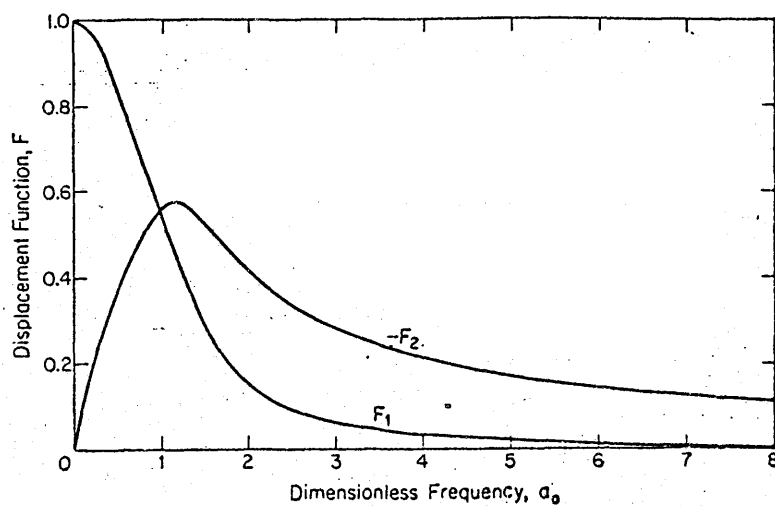


Fig.4.

Los resultados se recogen en la Fig. 4. extendidos a una amplia gama de a_0 , mientras que en la Fig. (5) se dibujan los factores de amplificación y en la Fig. 6 las frecuencias a las que se producen las respuestas máximas y los valores máximos de los coeficientes de amplificación.

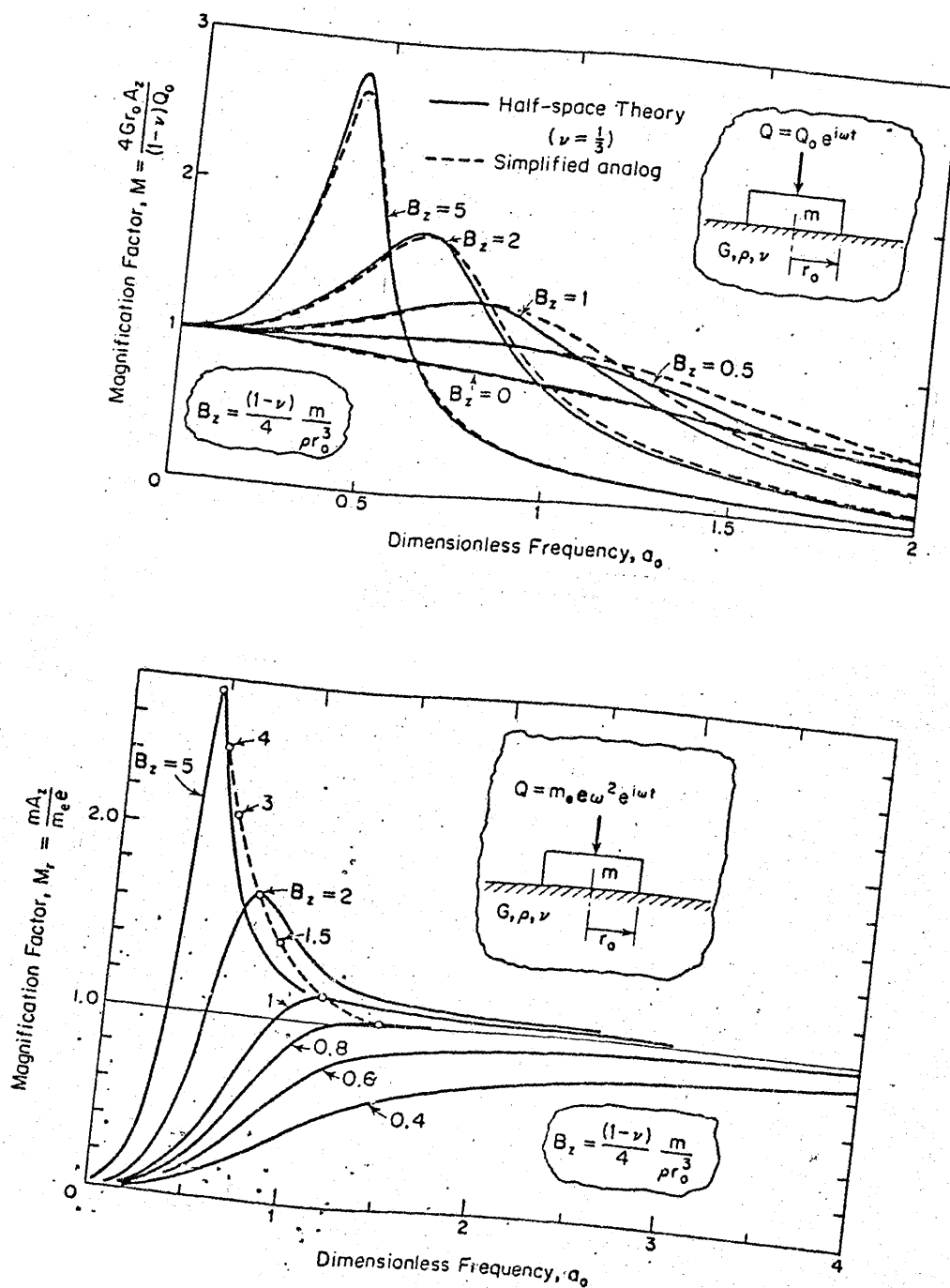


Fig. 5

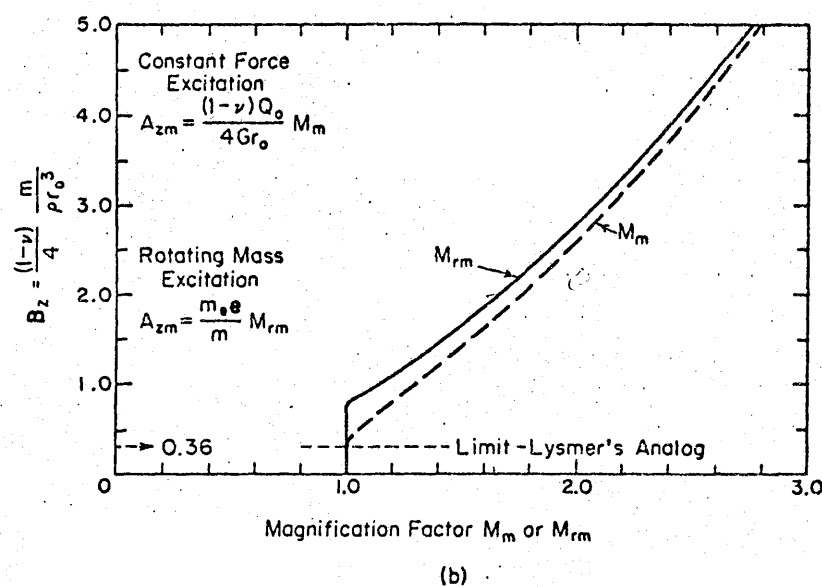
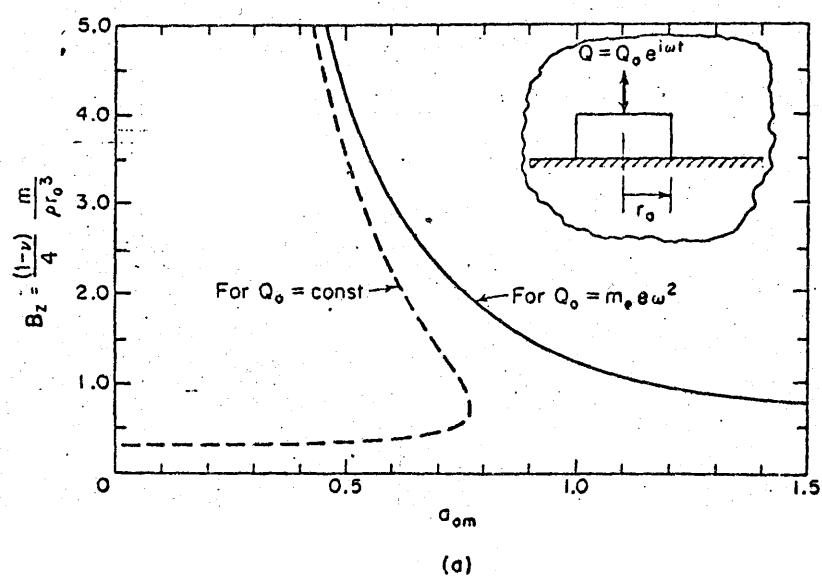


Fig. 6

Un paso mas dado por LYSMER pretende simplificar la situación buscando la posibilidad de eliminar la variabilidad de los parámetros k_{eq} y c_{eq} con la frecuencia de excitación.

El problema se puede presentar en la forma siguiente .

La expresión (2) se puede escribir en la forma:

$$P_o = K (k + i a_o c) w_o \quad (23)$$

donde K es la rigidez estática

$$K = \frac{4 G r_o}{1 - \nu} \quad (24)$$

y las relaciones de k y c con f_1 y f_2 se obtienen en forma obvia.

Se pretende reducir el problema del disco rígido sin masa soldado al se miespacio, al sistema con un grado de libertad equivalente

$$M_{eq} \ddot{w} + c_{eq} \dot{w} + k_{eq} w = P_o e^{i \omega t} \quad (25)$$

con $w = w_o e^{i \omega t}$

$$w_o \left[(-\omega^2 m_{eq} + k_{eq}) + i \omega c_{eq} \right] = P_o \quad (26)$$

Identificando partes real e imaginaria de (26) y (23), se escribe:

$$\omega c_{eq} = a_o K c \quad (27)$$

$$-\omega^2 m_{eq} + k_{eq} = k K$$

El método de HSIEH implica la elección

$$\begin{aligned} m_{eq} &= 0 \\ k_{eq} &= k \quad K \\ c_{eq} &= \frac{a_0}{\omega} \quad Kc \end{aligned} \quad (28)$$

Pero existe una amplia variedad de posibilidades. RICHART y LYSMER establecieron un modelo basado en

$$k_{eq} = K \quad (29)$$

con lo que de (27) se deduce

$$m_{eq} = \frac{K}{\omega^2} (1-k) \quad (30)$$

que debe incorporarse a la masa de la zapata cuando se realice el estudio conjunto.

Sin embargo, LYSMER prefirió tomar una combinación incompatible

$$k_{eq} = K \quad m_{eq} = 0 \quad (31)$$

y ajustar un

$$c_{eq} = \frac{3.4 \, r_o^2}{1-\nu} \sqrt{\rho \, G} \quad (32)$$

de modo que la respuesta se ciñese lo mas posible a las curvas exactas. El resultado son las líneas punteadas de la Fig. 5., que pueden utilizarse para tanteos rápidos.

1.2.--Vibraciones Horizontales y Giratorias en régimen permanente. El método de Veletsos.

Las ideas anteriores condujeron a una serie de investigadores al análisis de la respuesta de la zapata cilíndrica frente a sollicitaciones generales: momentos flectores y torsores y fuerzas horizontales oscilantes. El estado de la cuestión hasta 1969 puede verse en las tantas veces citada obra de RICHART, HALL y WOODS. Sin embargo, el método de LYSMER sólo relajaba las condiciones a) y b) expuestas al comienzo del párrafo

anterior. Al estudiar el caso de giro y traslación ambos están acoplados y el estado de tensiones puede provocar severas discrepancias con las simplificaciones deseables. En particular es prácticamente imposible encontrar valores independientes de α_0 . Todo ellos condujo a un replanteamiento del problema y a la emisión de unos resultados por parte de ANESTIS, VELETSOS y sus colaboradores, que constituyen la base admitida de los estudios actuales.

En su artículo clave de 1971, VELETSOS Y WEI estudiaban el comportamiento horizontal, replanteándose el problema desde el comienzo con la siguiente hipótesis de evolución de tensiones en la interfase:

- 1) Durante la actuación de la carga horizontal la componente normal de la tensión de contacto es nula.
- 2) Durante la actuación del momento la componente tangencial de la tensión de contacto es nula.

En respuesta a cada tipo de carga el disco gira y se traslada simultáneamente en ambos casos y debido a las hipótesis anteriores la placa no se mantiene rigurosamente rígida.

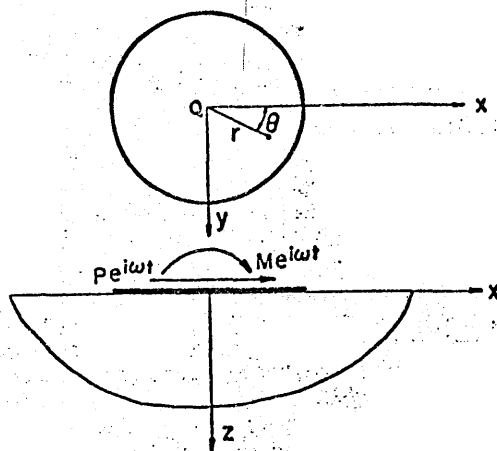
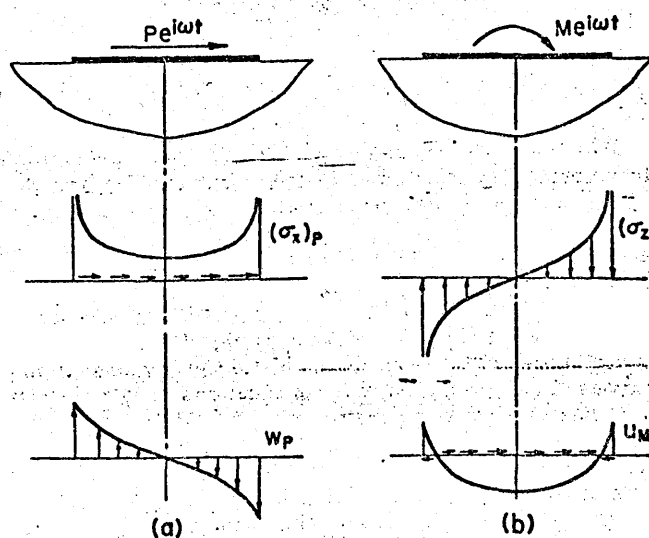


FIG. 1.—SYSTEM CONSIDERED



Con objeto de mantener las relaciones de reciprocidad entre las tensiones y movimientos de acoplamiento utilizaron un procedimiento de ponderación del siguiente corte:

Si llamamos ϕ_p^* y u_M^* al giro provocado por P y al desplazamiento provocado por M respectivamente, la condición de reciprocidad sería

$$P u_M^* = M \phi_p^*$$

Como según el teorema de Maxwell-Betti

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} \sigma_x^P u_M r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} \sigma_z^M w_P r dr d\theta$$

y por definición

$$P = \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} \sigma_x^P r dr d\theta$$

$$M = \int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} (\sigma_z^M r) r dr d\theta$$

es inmediato establecer

$$u_M^* = \left(\int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} \sigma_x^P u_M r dr d\theta \right) / \left(\int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} \sigma_x^P r dr d\theta \right)$$

$$\phi_p^* = \left(\int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} \sigma_z^M \left(\frac{w_P}{r} \right) r^2 dr d\theta \right) / \left(\int_0^{2\pi} \int_0^{r_0} \sigma_z^M r^2 dr d\theta \right)$$

en las que se observa que las funciones de ponderación son, precisamente σ_x^P y σ_z^M .

Los resultados pueden presentarse en forma de matriz de flexibilidad.

(33)

$$\begin{Bmatrix} u \\ \phi_{r_0} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} + i g_{11} & f_{12} + i g_{12} \\ f_{21} + i g_{21} & f_{22} + i g_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{st} \\ \phi_{st} \end{Bmatrix}$$

con

$$\begin{aligned} u_{st} &= \frac{2-\nu}{8 G r_o} P \\ \phi_{st} &= \frac{3(1-\nu)}{8 G r_o^3} M \end{aligned} \quad (34)$$

Por el teorema de reciprocidad es evidente que

$$(f_{12} + i g_{12}) r_o \frac{3(1-\nu)}{8 G r_o^3} = \frac{1}{r_o} (f_{21} + i g_{21}) \frac{2-\nu}{8 G r_o}$$

es decir

$$f_{12} + i g_{12} = \frac{2-\nu}{3(1-\nu)} (f_{21} + i g_{21}) \quad (35)$$

La figura 8 recoge la forma de los coeficientes para varios valores de ν

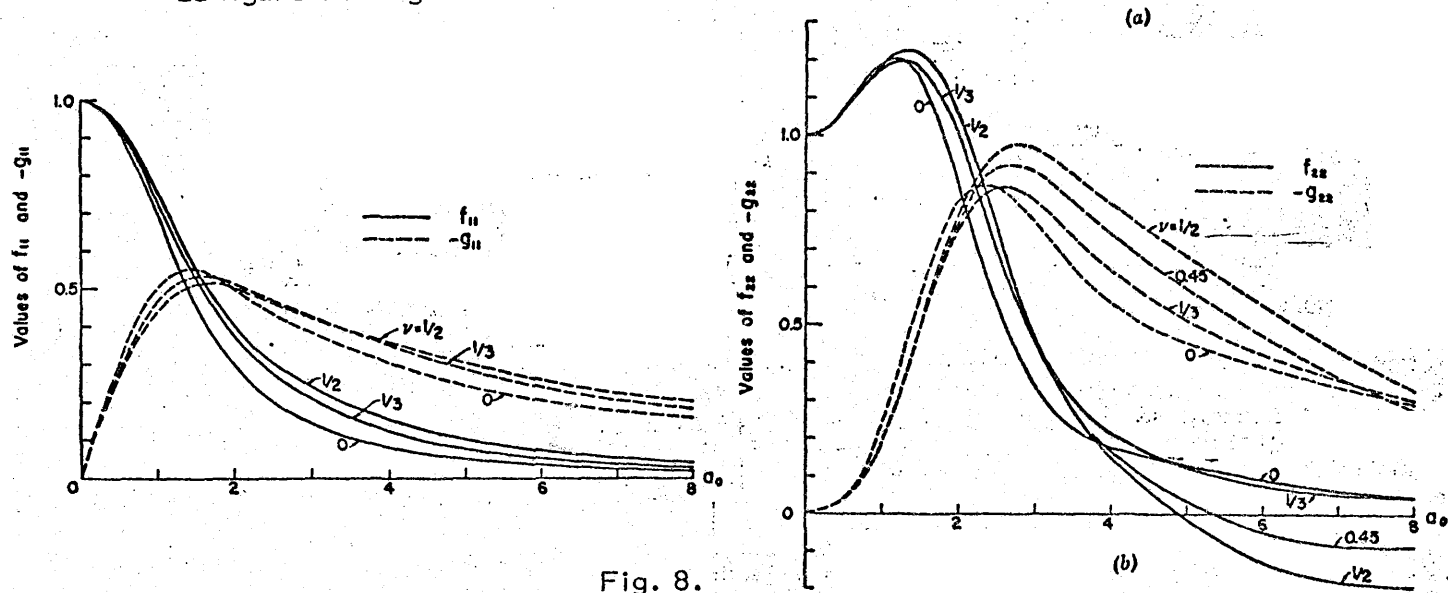


Fig. 8.

La presentación alternativa es como matriz de rigidez

$$\begin{Bmatrix} P \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_x (k_{11} + i a_o c_{11}) & K_x r_o (k_{21} + i a_o c_{21}) \\ K_x r_o (k_{21} + i a_o c_{21}) & K_\phi (k_{22} + i a_o c_{22}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \phi \end{Bmatrix} \quad (36)$$

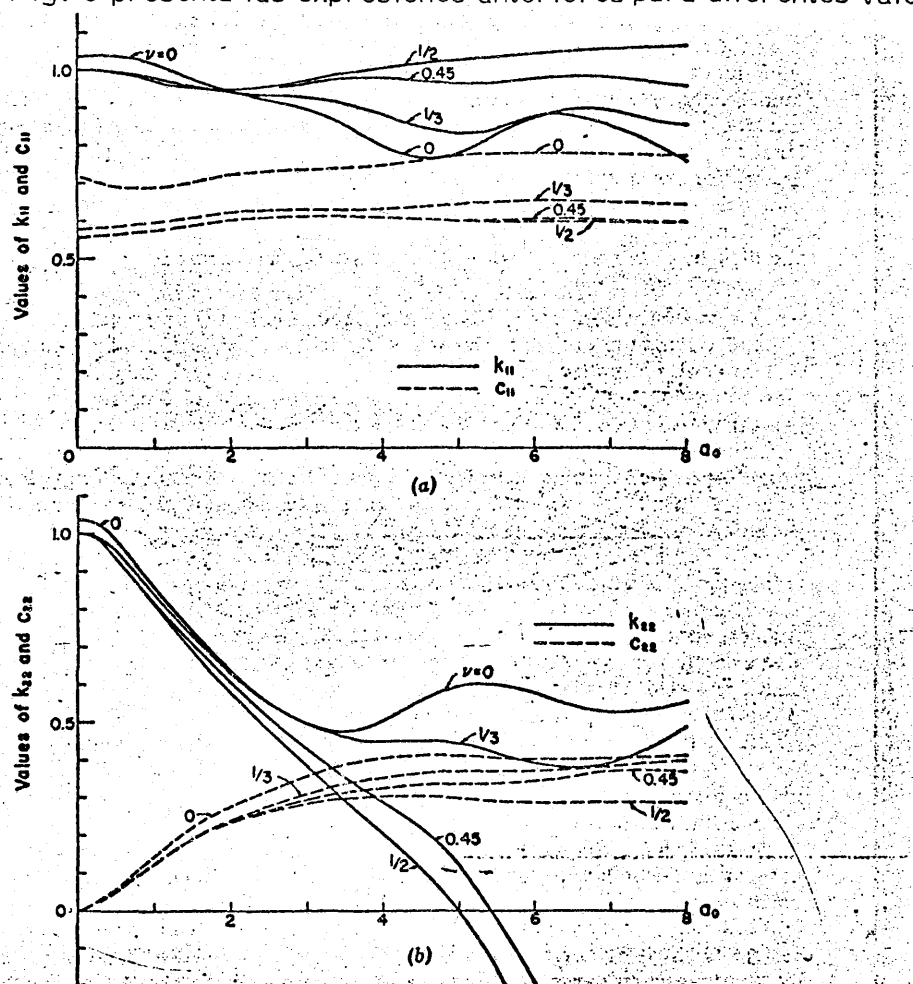
en la que

$$K_x = \frac{P}{u_{st}} = \frac{8 G r_o}{2 - \nu}$$

$$K = \frac{M}{\phi_{st}} = \frac{8 G r_o^3}{3 (1 - \nu)} \quad (37)$$

y la relación con los valores anteriores es evidente.

La Fig. 9 presenta las expresiones anteriores para diferentes valores



del coeficiente de Poisson.

Fig. 9

Es muy llamativa la fuerte dependencia que los valores k_{22} presentan respecto al coeficiente de Poisson a partir de un $a_0 \approx 2$. Así como los valores negativos para $a_0 > 4.5$ y $\nu = \frac{1}{2}$.

Como dijimos anterioremente ello es debido a que el factor k recoge la respuesta en fase formada tanto por la elasticidad del terreno como por su inercia, y ésta ($-m \omega^2$) llega a predominar para valores altos. Es

precisamente para evitar estos valores negativos del muelle equivalente, que muchos autores recomiendan el uso de una masa equivalente de suelo según se dijo al final del apartado anterior.

Respecto a la importancia relativa de los diferentes valores puede verse que $k_{11} > k_{22}$ lo que indica la mayor rigidez del terreno frente a movimientos horizontales y que las fuerzas de inercia desarrolladas por un momento son, en general, mas importantes que las de los correspondientes a una carga horizontal. Respecto al amortiguamiento c_{22} se mantiene siempre por debajo de 0.5 y es muy pequeño para frecuencias bajas, -- mientras que c_{11} se situa, prácticamente constante, por encima de 0.6. En consecuencia las curvas de respuesta para los movimientos de giro, al estar muy poco amortiguadas, presentarán picos importantes; físicamente ello corresponde a la idea de que las ondas generadas por la zapata a ambos lados del eje horizontal son antisimétricas y compensan sus efectos, produciéndose un intercambio de energía entre ellos, en lugar de alejarse hacia el infinito como sucede en el resto de los casos.

Finalmente es notable observar (Fig. 9 y 10) la poca importancia de los

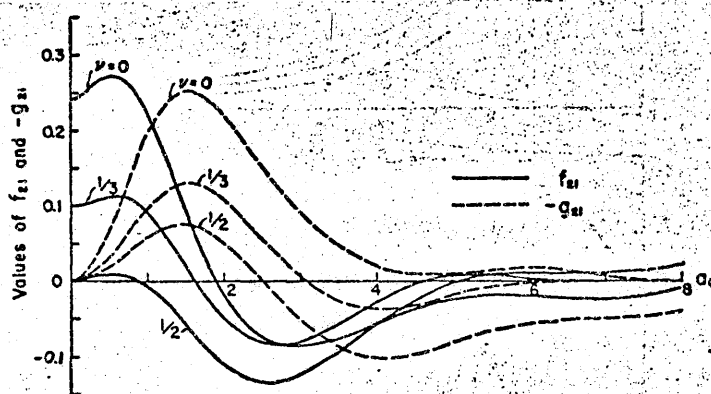


Fig. 9.bis.

términos de acoplamiento lo que permite a todos los efectos prácticos -- despreciarlos y utilizar una matriz diagonal.

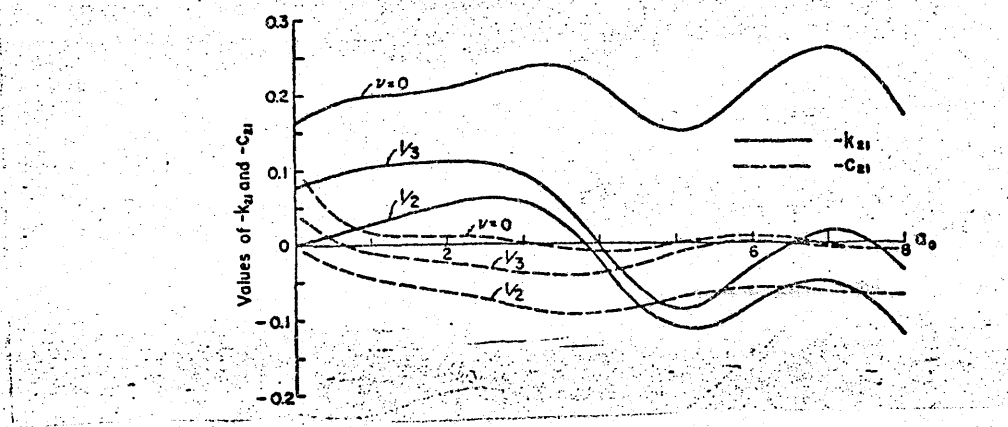


Fig. 10

En las páginas que siguen se recogen los valores numéricos de las funciones definidas anteriormente

VALORES DE LOS COEFICIENTES DE FLEXIBILIDAD, RIGIDEZ Y AMORTIGUAMIENTO

a_0 (1)	ν (2)	f_{11} (3)	g_{11} (4)	f_{21} (5)	g_{21} (6)	f_{22} (7)	g_{22} (8)	k_{11} (9)	c_{11} (10)	k_{21} (11)	c_{21} (12)	k_{22} (13)	c_{22} (14)
0.25	0	1	0	0.2387	0	1	0	1.0395	—	-0.1054	—	1.0395	—
	1/3	1	0	0.0955	0	1	0	1.0076	—	-0.0802	—	1.0076	—
	0.50	1	0	0	0	1	0	1	—	0	—	1	—
	0	0.9768	-0.1633	0.2564	-0.0187	1.0212	-0.0048	1.0411	0.7011	-0.1763	-0.0698	1.0238	0.0240
0.5	1/3	0.9818	-0.1431	0.1039	-0.0086	1.0177	-0.0037	1.0064	0.5861	-0.0866	-0.0228	0.9914	0.0138
	0.45	0.9826	-0.1386	0.0365	-0.0060	1.0178	-0.0036	0.9991	0.5628	-0.0345	0.0027	0.9837	0.0130
	0.50	0.9828	-0.1375	0.0048	-0.0051	1.0163	-0.0036	0.9980	0.5584	-0.0054	0.0173	0.9820	0.0138
	0	0.9102	-0.3105	0.2719	-0.0686	1.0766	-0.0370	1.0384	0.6924	-0.1888	-0.0414	0.9770	0.0536
0.75	1/3	0.9290	-0.2746	0.1120	-0.0321	1.0652	-0.0285	1.0013	0.5862	-0.0950	-0.0062	0.9482	0.0456
	0.45	0.9323	-0.2653	0.0417	-0.0225	1.0659	-0.0278	0.9937	0.5649	-0.0433	0.0164	0.9390	0.0465
	0.50	0.9329	-0.2643	0.0088	-0.0191	1.0678	-0.0280	0.9922	0.5613	-0.0136	0.0302	0.9357	0.0484
	0	0.8096	-0.4275	0.2639	-0.1342	1.1441	-0.1153	1.0290	0.6892	-0.1962	-0.0346	0.9139	0.0978
1.00	1/3	0.8478	-0.3841	0.1089	-0.0642	1.1268	-0.0898	0.9922	0.5886	-0.1012	0.0047	0.8919	0.0867
	0.45	0.8546	-0.3733	0.0385	-0.0451	1.1292	-0.0880	0.9850	0.5690	-0.0491	0.0250	0.8813	0.0881
	0.50	0.8560	-0.3706	0.0055	-0.0384	1.1334	-0.0890	0.9833	0.5660	-0.0215	0.0394	0.8760	0.0906
	0	0.6896	-0.5053	0.2242	-0.1962	1.1941	-0.2137	1.0131	0.6909	-0.1992	-0.0161	0.8482	0.1434
1.25	1/3	0.7480	-0.4642	0.0908	-0.0966	1.1808	-0.1934	0.9800	0.5933	-0.1052	0.0116	0.8336	0.1271
	0.45	0.7588	-0.4523	0.0240	-0.0678	1.1866	-0.1966	0.9741	0.5748	-0.0546	0.0326	0.8214	0.1282
	0.50	0.7610	-0.4492	-0.0078	-0.0576	1.1941	-0.1932	0.9725	0.5723	-0.0287	0.0460	0.8139	0.1306
	0	0.5673	-0.5430	0.1631	-0.2384	1.1981	-0.4082	0.9931	0.6967	-0.2004	-0.0124	0.7866	0.1842
1.50	1/3	0.6416	-0.5123	0.0594	-0.1206	1.2028	-0.3326	0.9663	0.5995	-0.1079	0.0160	0.7785	0.1628
	0.45	0.6562	-0.5008	-0.0008	-0.0842	1.2156	-0.3302	0.9629	0.5817	-0.0694	0.0376	0.7641	0.1628
	0.50	0.6592	-0.4975	-0.0304	-0.0712	1.2272	-0.3357	0.9615	0.5797	-0.0357	0.0512	0.7540	0.1646
	0	0.4566	-0.5476	0.0940	-0.2535	1.1999	-0.5807	0.9724	0.7050	-0.2017	-0.0112	0.7393	0.2190
1.75	1/3	0.5402	-0.5314	0.0206	-0.1306	1.1780	-0.4892	0.9532	0.6066	-0.1190	0.0194	0.7274	0.1929
	0.45	0.5579	-0.5212	-0.0317	-0.0895	1.1991	-0.4905	0.9531	0.5892	-0.0639	0.0418	0.7100	0.1915
	0.50	0.5615	-0.5180	-0.0586	-0.0748	1.2149	-0.5008	0.9522	0.5876	-0.0128	0.0557	0.6969	0.1924
	0	0.3651	-0.5302	0.0307	-0.2440	1.0227	-0.7280	0.9538	0.7142	-0.2045	-0.0108	0.6788	0.2486
2.00	1/3	0.4515	-0.5286	-0.0178	-0.1253	1.1014	-0.6387	0.9423	0.6137	-0.1117	0.0223	0.6800	0.2184
	0.45	0.4713	-0.5204	-0.0628	-0.0823	1.1309	-0.6481	0.9464	0.5964	-0.0630	0.0458	0.6586	0.2154
	0.50	0.4755	-0.5172	-0.0670	-0.0669	1.1502	-0.6651	0.9462	0.5951	-0.0498	0.0660	0.6420	0.2150
	0	0.2940	-0.5013	-0.0189	-0.2183	0.8670	-0.8260	0.9393	0.7225	-0.2092	-0.0103	0.6314	0.2742
2.25	1/3	0.3786	-0.5123	-0.0495	-0.1076	0.9820	-0.7583	0.9348	0.6198	-0.1128	0.0252	0.6356	0.2405
	0.45	0.3999	-0.5061	-0.0885	-0.0644	1.0175	-0.7801	0.9438	0.6025	-0.0712	0.0500	0.6090	0.2356
	0.50	0.4045	-0.5030	-0.1107	-0.0491	1.0390	-0.8055	0.9447	0.6016	-0.0563	0.0646	0.5862	0.2336
	0	0.3210	-0.4897	-0.0711	-0.0626	0.8987	-0.8343	0.9306	0.6243	-0.1127	0.0282	0.5942	0.2602
2.50	1/3	0.2006	-0.4376	-0.0730	-0.1504	0.5501	-0.8598	0.9201	0.7330	-0.2332	-0.0075	0.5497	0.3183
	0.45	0.2761	-0.4657	-0.0822	-0.0552	0.6926	-0.8652	0.9286	0.6271	-0.1106	0.0315	0.5560	0.2781
	0.50	0.2990	-0.4630	-0.1134	-0.0125	0.7265	-0.9182	0.9503	0.6098	-0.0722	0.0391	0.5140	0.2666
	0	0.3044	-0.4600	-0.1332	-0.0023	0.7457	-0.9624	0.9544	0.6098	-0.0647	0.0743	0.4827	0.2626
2.75	1/3	0.2405	-0.4430	-0.0844	-0.0291	0.5598	-0.8591	0.9268	0.6284	-0.1052	0.0348	0.5221	0.2946
	0	0.1462	-0.3844	-0.0852	-0.0904	0.3322	-0.7639	0.8968	0.7364	-0.2369	-0.0015	0.4933	0.3562
3.00	1/3	0.2113	-0.4224	-0.0796	-0.0663	0.4488	-0.8281	0.9294	0.6286	-0.0954	0.0379	0.4937	0.3100
	0.45	0.2353	-0.4228	-0.1053	0.0372	0.4636	-0.9074	0.9638	0.6108	-0.0577	0.0684	0.4265	0.2953
	0.50	0.2416	-0.4200	-0.1241	0.0521	0.4734	-0.9674	0.9734	0.6116	-0.0592	0.0842	0.3917	0.2843
	0	0.1863	-0.4040	-0.0701	0.0121	0.3613	-0.7839	0.9169	0.6285	-0.0799	0.0404	0.4723	0.3240

VALORES DE LOS COEFICIENTES DE FLEXIBILIDAD, RIGIDEZ Y AMORTIGUAMIENTO (CONTINUACION)

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)
3.50	0	0.1052	-0.3427	-0.0762	-0.0471	0.2208	-0.6463	0.8530	0.7402	-0.2375	0.0663	0.4774	0.3870
	1/3	0.1641	-0.3671	-0.0575	-0.0258	0.2950	-0.7352	0.9071	0.6286	-0.0580	0.0419	0.4587	0.3362
	0.45	0.1888	-0.3911	-0.0770	0.0709	0.2833	-0.8285	0.9740	0.6088	-0.0179	0.0750	0.3526	0.3163
	0.50	0.1963	-0.3868	-0.0952	0.0868	0.2802	-0.9001	0.9929	0.6100	-0.0302	0.0915	0.2897	0.2996
3.75	1/3	0.1459	-0.3710	-0.0431	0.0345	0.2457	-0.6875	0.8942	0.6293	-0.0301	0.0416	0.4527	0.3463
4.00	0	0.0810	-0.3070	-0.0574	-0.0208	0.1712	-0.5535	0.7988	0.7508	-0.2132	0.0115	0.5063	0.4065
	1/3	0.1254	-0.3550	-0.0284	0.0383	0.2085	-0.6443	0.8794	0.6308	0.0017	0.0292	0.4512	0.3539
	0.45	0.1498	-0.3632	-0.0407	0.0645	0.1700	-0.7413	0.9777	0.6063	0.0481	0.0718	0.2914	0.3257
	0.50	0.1583	-0.3620	-0.0579	0.1021	0.1530	-0.8207	1.0095	0.6071	0.0231	0.0922	0.2057	0.3069
4.50	0	0.0609	-0.2743	-0.0373	-0.0106	0.1474	-0.4909	0.7675	0.7668	-0.1732	0.0092	0.5576	0.4124
	1/3	0.0948	-0.3224	-0.0037	0.0333	0.1582	-0.5718	0.8177	0.6370	0.0506	0.0282	0.4539	0.3624
	0.45	0.1171	-0.3346	-0.0083	0.0787	0.0941	-0.6655	0.9730	0.6046	0.1183	0.0660	0.2235	0.3350
	0.50	0.1262	-0.3350	-0.0237	0.0981	0.0628	-0.7498	1.0200	0.6039	0.0795	0.0815	0.1137	0.3059
5.00	0	0.0488	-0.2456	-0.0239	-0.0117	0.1300	-0.4495	0.7828	0.7804	-0.1507	0.0007	0.5950	0.4088
	1/3	0.0744	-0.2908	0.0065	0.0192	0.1237	-0.5160	0.8335	0.6455	0.0867	0.0136	0.4437	0.3668
	0.45	0.0932	-0.3056	0.0110	0.0618	0.0366	-0.6001	0.9655	0.6052	0.1617	0.0532	0.1241	0.3367
	0.50	0.1020	-0.3076	-0.0019	0.0825	-0.0095	-0.6866	1.0248	0.6020	0.1097	0.0732	-0.0086	0.3001
5.50	1/3	0.0622	-0.2639	0.0091	0.0066	0.0961	-0.4697	0.8477	0.6521	0.0707	0.0024	0.4192	0.3712
6.00	0	0.0375	-0.2053	-0.0214	-0.0169	0.0921	-0.3920	0.8800	0.7819	-0.2088	-0.0089	0.5775	0.4010
	1/3	0.0543	-0.2428	0.0042	0.0002	0.0741	-0.4279	0.8772	0.6535	0.0305	-0.0018	0.3927	0.3761
	0.45	0.0669	-0.2582	0.0161	0.0347	-0.0462	-0.4782	0.9792	0.6965	0.1593	0.0337	-0.1822	0.3475
	0.50	0.0740	-0.2618	0.0082	0.0563	-0.1207	-0.5607	1.0459	0.6000	0.0795	0.0605	-0.3615	0.2902
6.50	1/3	0.0479	-0.2262	-0.0000	-0.0004	0.0587	-0.3890	0.8955	0.6508	-0.0067	-0.0002	0.3794	0.3867
7.00	0	0.0283	-0.1800	-0.0237	-0.0068	0.0618	-0.3371	0.8537	0.7096	-0.2614	0.0023	0.5264	0.4073
	1/3	0.0416	-0.2123	0.0025	0.0020	0.0502	-0.3544	0.8895	0.6180	-0.0181	0.0042	0.3912	0.3932
	0.45	0.0506	-0.2264	0.0157	0.0277	-0.0807	-0.3640	0.9854	0.6030	0.1751	0.0429	-0.5587	0.3769
	0.50	0.0565	-0.2306	0.0124	0.0490	-0.1774	-0.4341	1.0590	0.5961	0.0504	0.0659	-0.8085	0.2891
7.50	1/3	0.0356	-0.1995	-0.0012	0.0041	0.0471	-0.3260	0.8664	0.6179	0.0013	0.0071	0.4340	0.4008
8.00	0	0.0196	-0.1577	-0.0128	0.0004	0.0490	-0.2928	0.7677	0.7789	-0.1719	0.0071	0.5525	0.4144
	1/3	0.0306	-0.1872	0.0012	0.0038	0.0464	-0.3040	0.8519	0.6504	0.0328	0.0058	0.4918	0.4018
	0.45	0.0372	-0.2000	0.045	0.0190	-0.0790	-0.2784	0.9613	0.6024	0.3107	0.0411	-0.9002	0.4170
	0.50	0.0422	-0.2046	0.0219	0.0386	-0.1912	-0.3328	1.0635	0.5950	0.1200	0.0689	-1.2845	0.2904
9.00	1/3	—	—	—	—	0.0447	-0.2742	—	—	—	—	0.5792	0.3948
10.00	1/3	0.0211	-0.1508	—	—	0.0380	-0.2524	0.9084	0.6502	—	—	0.5828	0.3874

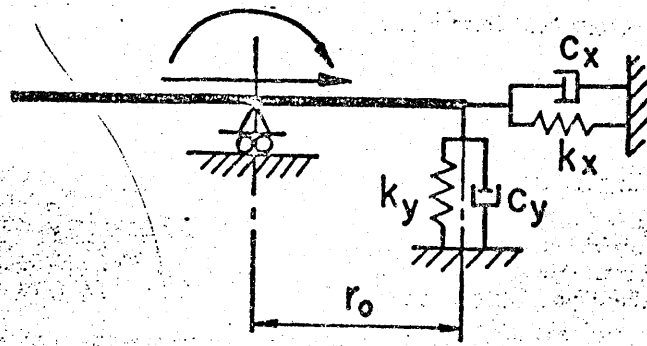
Si se desprecian los términos de acoplamiento de relación de rigidez es

$$\begin{Bmatrix} P \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (k_1 + i a_o c_1) K_x & 0 \\ 0 & (k_2 + i a_o c_2) K_\phi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \phi \end{Bmatrix} \quad (38)$$

con

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{f_{11}}{f_{11}^2 + g_{11}^2} & k_2 &= \frac{f_{22}}{f_{22}^2 + g_{22}^2} \\ c_1 &= -\frac{1}{a_o} \frac{g_{11}}{f_{11}^2 + g_{11}^2} & c_2 &= -\frac{1}{a} \frac{g_{22}}{f_{22}^2 + g_{22}^2} \end{aligned} \quad (39)$$

El modelo físico correspondiente es el de la Fig. 11



—MODEL FOR SIMPLIFIED FORCE-DEFLECTION RELATION

Fig. 11

donde

$$\begin{cases} k_x = k_1 K_x \\ k_y = \frac{1}{r_o^2} k_2 K_\phi = \frac{2-\nu}{3(1-\nu)} k_2 K_x \\ c_x = \frac{a_o c_1}{\omega} K_x = c_1 \frac{K_x r_o}{c_s} \\ c_y = \frac{2-\nu}{3(1-\nu)} \frac{a_o c_2}{\omega} K_x = \frac{(2-\nu) c_2}{3(1-\nu)} \frac{K_x r_o}{c_s} \end{cases} \quad (40)$$

Del mayor interés es el análisis de la distribución de tensiones en la interfase

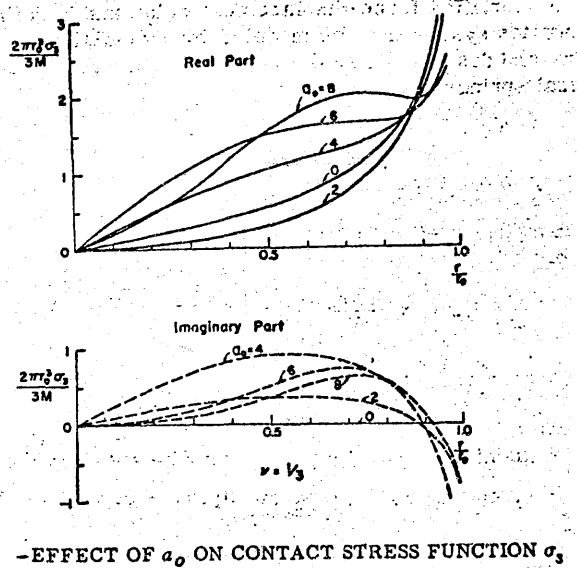


Fig. 12.a.

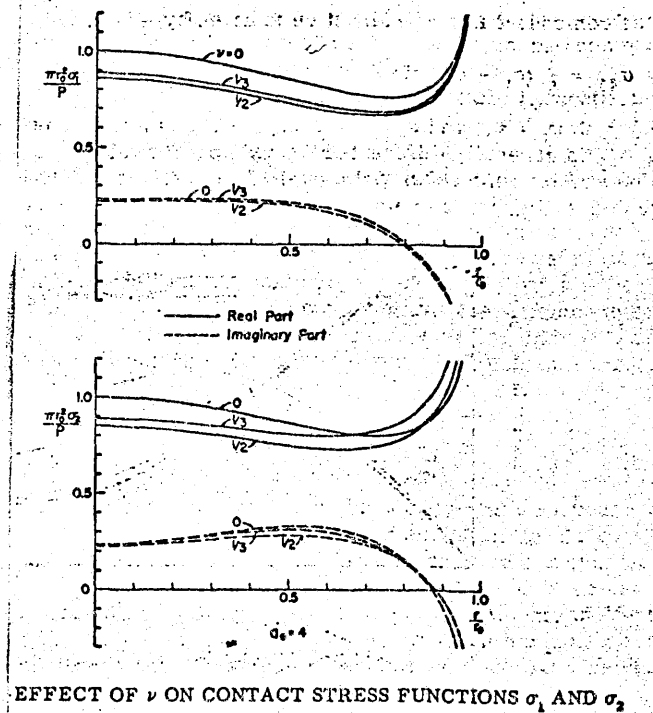


Fig. 13.a.

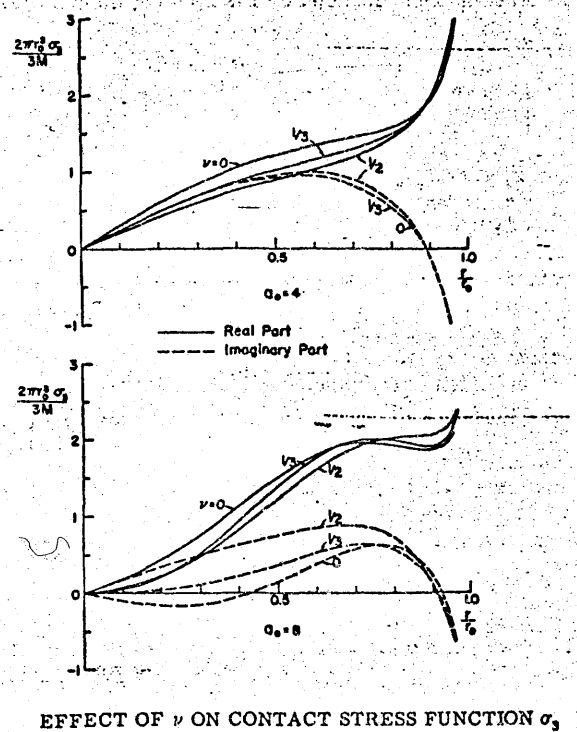


Fig. 12.b.

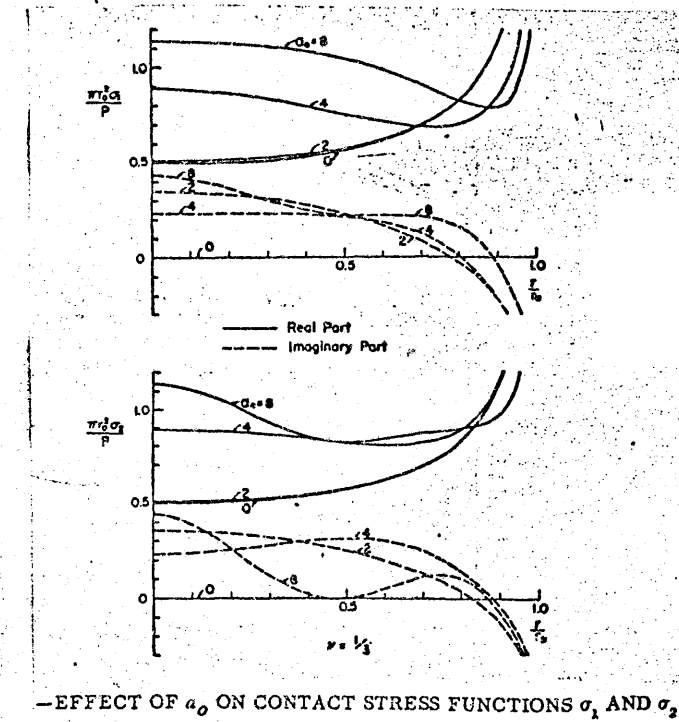


Fig. 13.b.

En las Figs. 12a) y b) se recoge la variación de las tensiones con el índice de frecuencia a_0 , mientras que 13 a) y b) se representa el efecto del coeficiente de Poisson.

Puede observarse que en la proximidades de $(r/r_0) = 0.85$ se inicia la tendencia hacia ∞ de las ramas representadas de los componentes reales, observándose que para valores altos de a_0 la diferencia de distribución con el caso estático es notable: la carga tiende a desplazarse hacia el exterior al aumentar la frecuencia.

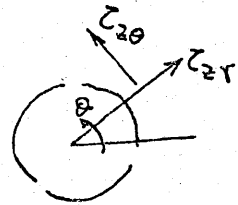
Las relaciones de los valores de las figuras anteriores con σ y τ son

Tensiones inducidas
por p

$$\begin{cases} \tau_{zr} = \sigma_1 \cos \theta \\ \tau_{z\theta} = -\sigma_2 \sin \theta \end{cases}$$

Tension inducida por
M:

$$\sigma_z = \sigma_3 \cos \theta$$



Respecto a la componente en la dirección de actuación de la carga son, evidentemente

$$\tau_{zx} = \frac{1}{2} (\sigma_1 + \sigma_2) + \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) \cos 2\theta$$

$$\tau_{zy} = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) \sin 2\theta$$

1.3.--El modelo de Veletsos para el caso general. Expresiones aproximadas.

En vista de la efectividad de la simplificación anterior VELETSOS (1972) ha establecido las expresiones de flexibilidad y rigidez para cargas armónicas del tipo

$$\begin{aligned} P_x(t) &= P_x e^{i\omega t} \\ P_z(t) &= P_z e^{i\omega t} \\ M_y(t) &= M_y e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (38)$$

en la forma

$$\begin{Bmatrix} u \\ \theta \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_x & & \\ & H & \\ & & H_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} P_x \\ M_y \\ P_z \end{Bmatrix} \quad (39)$$

o bien

$$\begin{Bmatrix} P_x \\ M_y \\ P_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_x & & \\ & Q & \\ & & Q_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \theta \\ w \end{Bmatrix} \quad (40)$$

donde

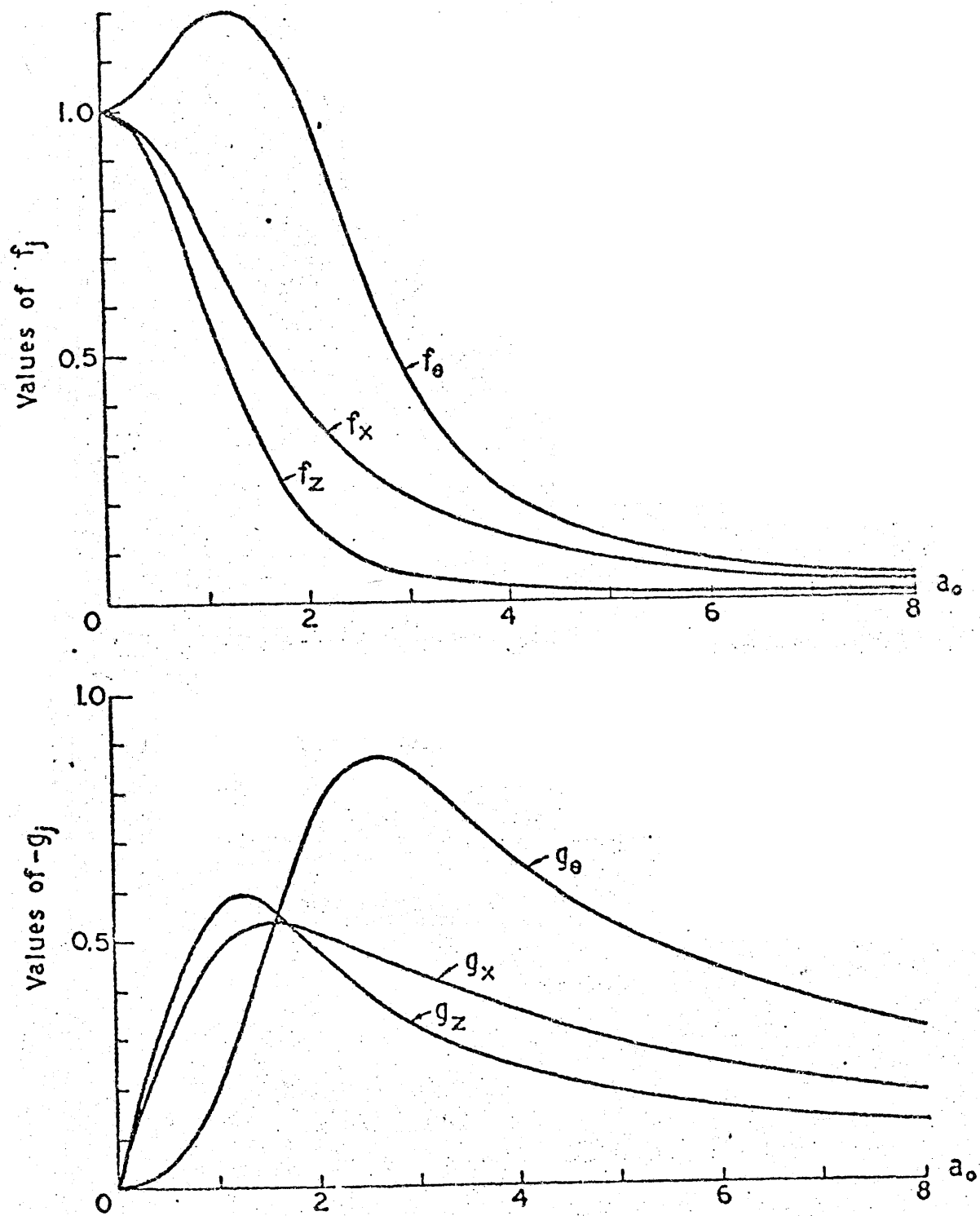
$$\begin{aligned} H_j &= \frac{1}{K_j} (f_j + i g_j) \\ Q_j &= K_j (k_j + i a_o c_j) \end{aligned} \quad (41)$$

$j = x, \theta, z$

y

$$\begin{aligned} K_x &= \frac{8 G r_o}{2 - \nu} \\ K &= \frac{8 G r_o^3}{3 (1 - \nu)} \\ K_z &= \frac{4 G r}{1 - \nu} \end{aligned}$$

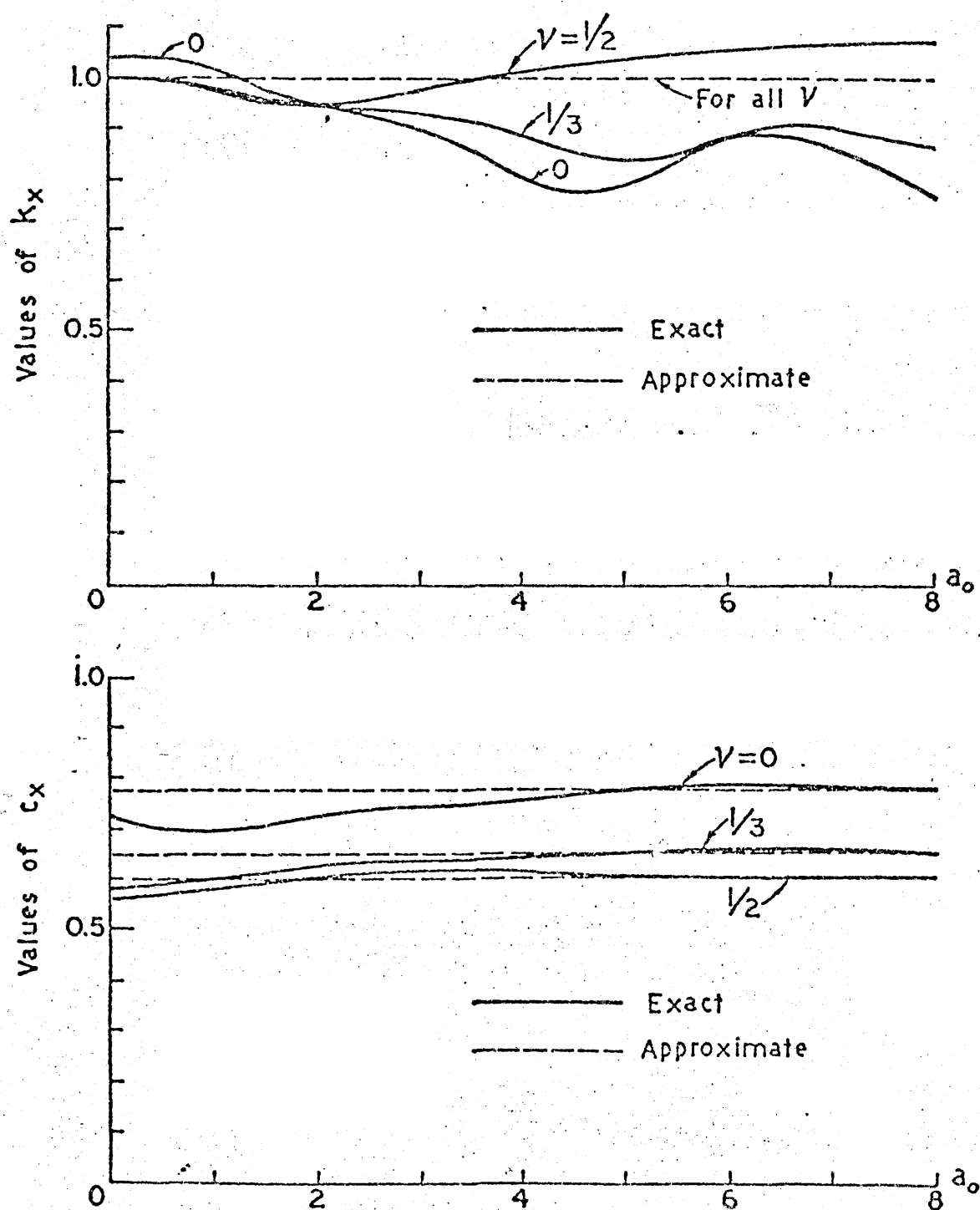
En la Fig. 14 se recoge la evolución de las flexibilidades y rigideces a efecto de su comparación, mientras que



FUNCTIONS f_j AND g_j FOR SYSTEM WITH $\nu = 1/3$

Fig. 14

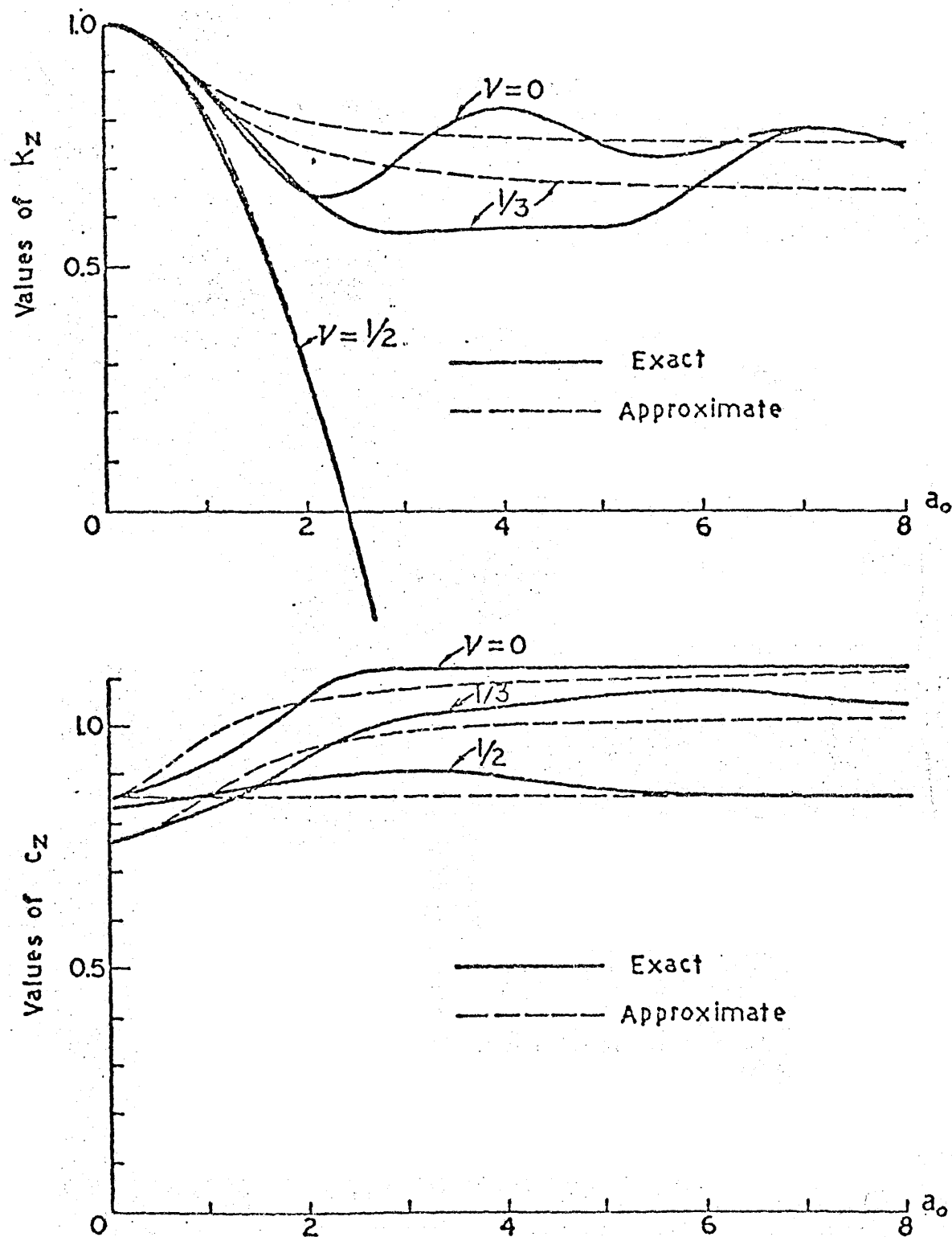
en las Figs. 15,16,17 se recogen las rigideces y amortiguamientos para los distintos tipos de movimientos.



FUNCTIONS k_x AND c_x FOR HORIZONTALLY EXCITED DISK

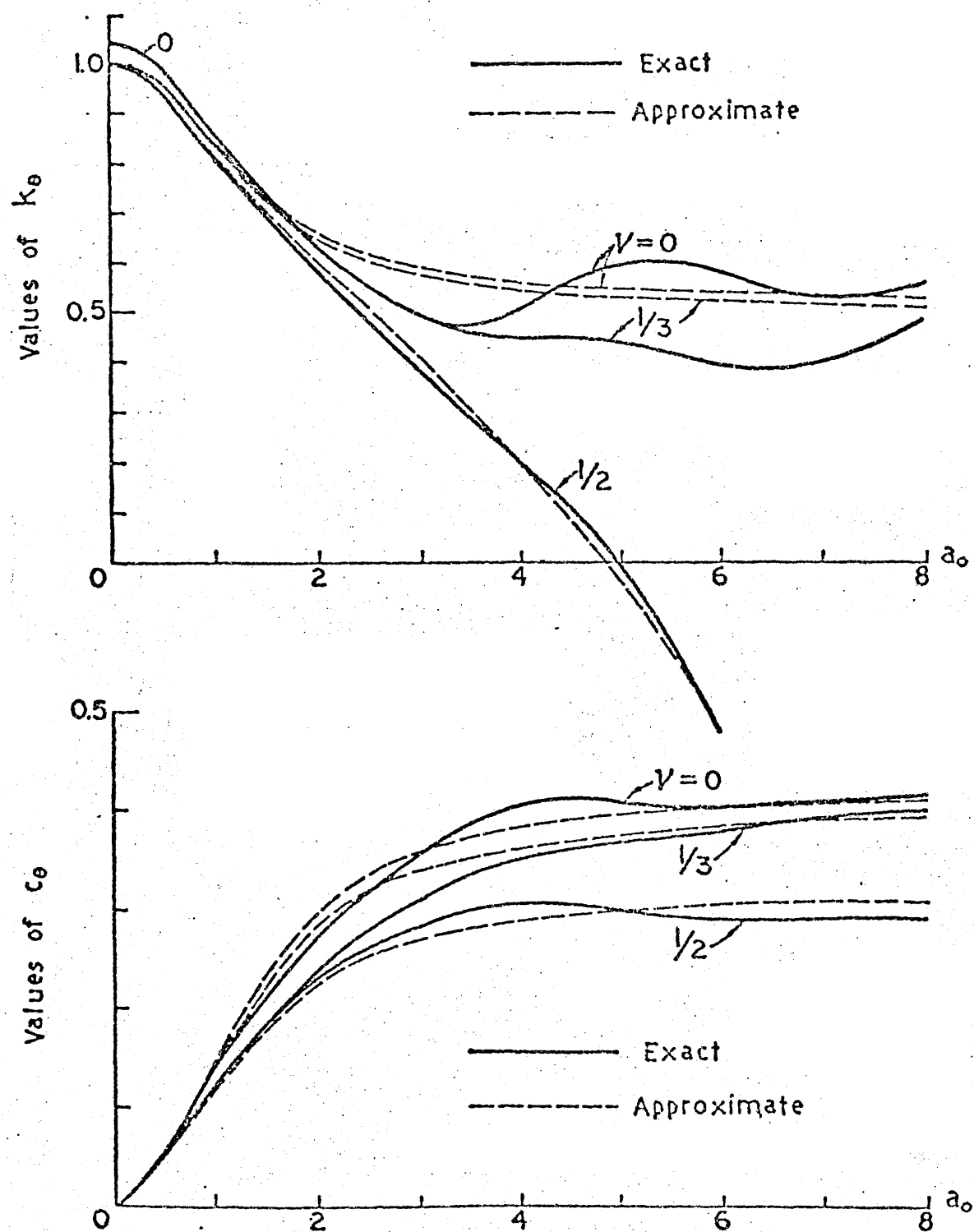
Fig. 15

En ellas se aprecian todas las características comentadas anteriormente y, en particular, ...



FUNCTIONS k_z AND c_z FOR VERTICALLY EXCITED DISK

la semejanza de comportamiento de las k_z y k_θ , con que no quedaba claro en los trabajos de LYSMER



FUNCTIONS k_θ AND c_θ FOR DISK IN ROCKING MOTION

Con objeto de disponer de expresiones polinómicas sencillas en dichas figuras se recogen de puntos las gráficas de las siguientes fórmulas -- aproximadas:

MOVIMIENTO HORIZONTAL

$$Q_x(a_o) = K_x (1 + i b_1 a_o) \tag{43}$$

donde

$v = 0$	$v = 1/3$	$v = 0.45$	$v = 0.5$
$b_1 = 0.775$	0.65	0.60	0.60

Asimismo, la tabla siguiente, recoge valores de los parámetros que in

VALUES OF b_i AND d_i

Quantity (1)	For Disk in Rocking Motion				For Vertically Excited Disk		
	$v = 0$ (2)	$v = 1/3$ (3)	$v = 0.45$ (4)	$v = 0.5$ (5)	$v = 0$ (6)	$v = 1/3$ (7)	$v = 0.5$ (8)
b_1	0.525	0.5	0.45	0.4	0.25	0.35	0
b_2	0.8	0.8	0.8	0.8	1.0	0.8	0
b_3	0	0	0.023	0.027	0	0	0.17
b_4	-	-	-	-	0.85	0.75	0.85
d_1	1.237	1.25	1.406	1.647	0.841	0.941	2.500
d_2	2.382	2.50	3.435	4.629	0.909	0.971	9.672
d_3	1.252	1.25	1.371	1.417	0.452	0.574	0.608
d_4	0.024	0	-0.191	0.715	0.324	0.491	-
d_5	0	0	-3.435	-4.629			
d_6	-	-	14.090	9.803			

tervienen en las fórmulas aproximadas para:

MOVIMIENTO DE GIRO

$$k_\theta = 1 - b_1 \frac{(b_2 a_o)^2}{1 + (b_2 a_o)^2} - b_3 a_o^2 \tag{44}$$
$$c_\theta = b_1 b_2 \frac{(b_2 a_o)^2}{1 + (b_2 a_o)^2}$$

MOVIMIENTO VERTICAL

$$k_z = 1 - b_1 \frac{(b_2 a_o)^2}{1 + (b_2 a_o)^2} - b_3 a_o^2 \quad (45)$$

$$c_z = b_4 + b_1 b_2 \frac{(b_2 a_o)^2}{1 + (b_2 a_o)^2}$$

La fórmulas han sido sugeridas por experiencias con modelos sencillos como el de la Fig. 18, en la que se puede ver la influencia que tiene la presencia de la masa sobre la forma de k y que, en párrafos anteriores llevó a su inclusión en el modelo equivalente.

Si se quiere evitar la aparición de valores negativos en k VELETSOS - (1973) recomienda la elección

$$K_{eq} = K_i$$

$$m_{eq} = B_i^{eq} K_i \left(\frac{r_o}{c_s} \right)^2 \quad (46)$$

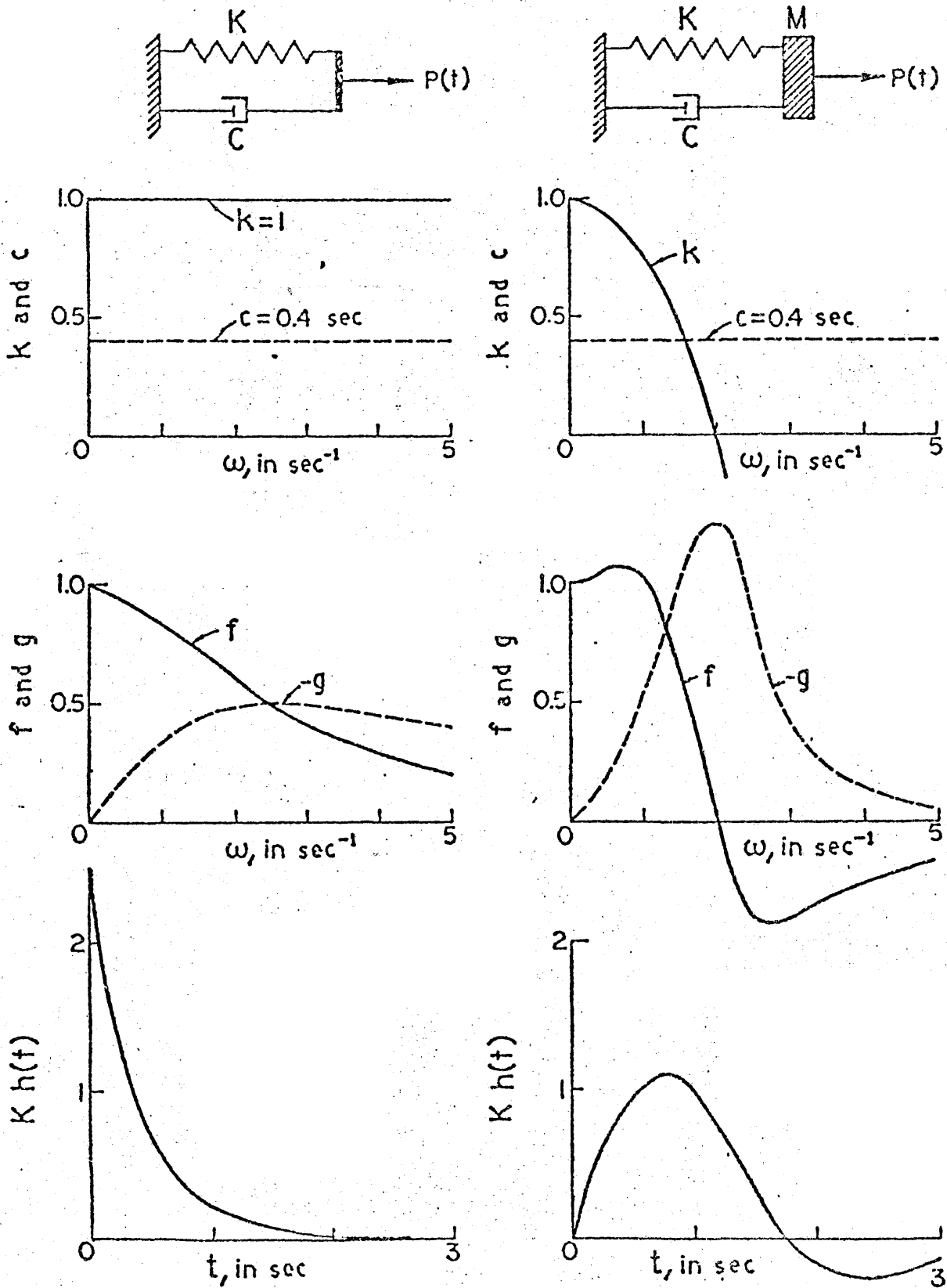
$$B_i^{eq} = \frac{1 - k_i}{2 a_o}$$

es decir

$$m_x^{eq} = \frac{8 B_x^{eq}}{2 - \nu} \rho r_o^3$$

$$m_\theta^{eq} = I^{eq} = \frac{8 B_\theta^{eq}}{3(1-\nu)} \rho r_o^5 \quad (47)$$

$$m_z^{eq} = \frac{4 B_z^{eq}}{1 - \nu} \rho r_o^3$$



FREQUENCY AND IMPULSE RESPONSE FUNCTIONS FOR SIMPLE OSCILLATOR

Fig. 18

1.4.--Vibraciones de torsión

Las vibraciones de torsión se encuentran desacopladas de las anteriores.

Los primeros resultados debidos a REISNER y SAGOCI (1944) partían de una hipótesis de distribución de tensiones tangenciales del tipo

$$\tau = \frac{3}{4\pi} \frac{M_t r}{r_o^3 \sqrt{r^2 - r_o^2}} \quad (48)$$

que se hacen infinitas con $r = r_o$. Esta ley corresponde al caso rígido es tático y con ella se pueden definir la constante elástica

$$K_\psi = \frac{16}{3} G r_o^3 \quad (49)$$

así como los índices de masa, amortiguamiento etc. Para representar re sultados congruentes con los anteriores se puede definir el factor de - amortiguamiento como

$$C_\psi = \frac{16}{3} \sqrt{G \rho} r_o^4 \quad (50)$$

y de esta forma poner

$$M_t = K_\psi (k_\psi + i a_o C_\psi) \quad (51)$$

los valores de K_ψ y C_ψ pueden obtenerse de la Fig. 19 que recoge los resultados de LUCO y WESTMANN (1971).

Es importante hacer notar la independendencia respecto al coeficiente de - Poisson así como la ausencia de disipación por ondas diferentes a las S.

NOVAK y su escuela han presentado también valores para este caso que serán comentados mas adelante, en el contexto general de las cimen taciones empotradas en el terreno.

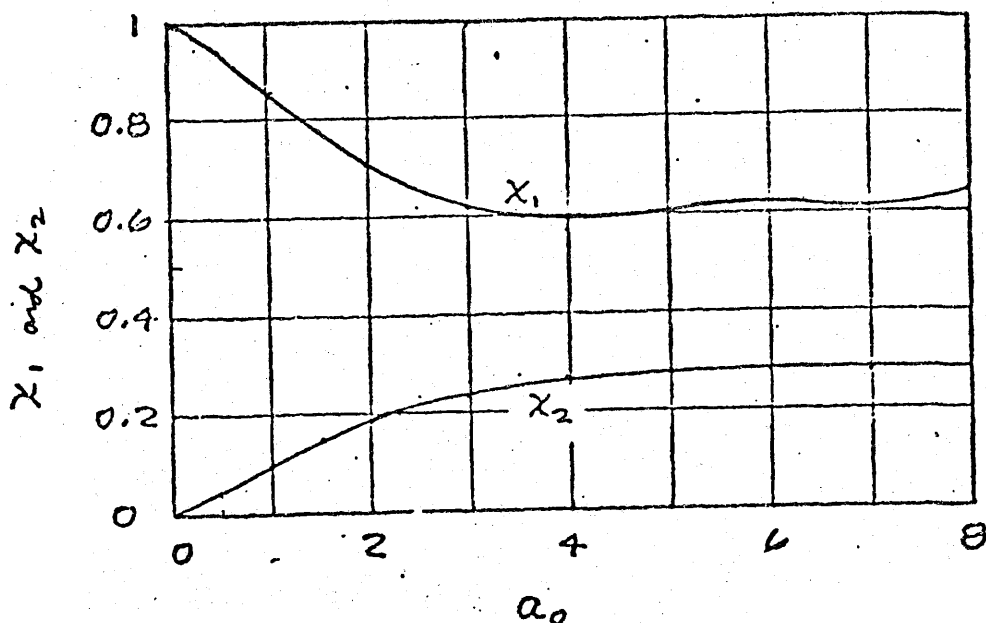


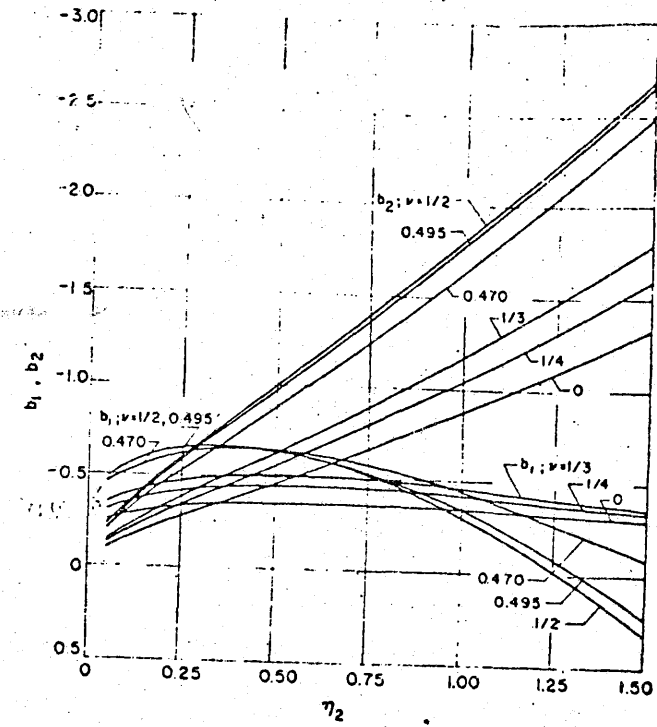
Fig. 19

1.5.--La carga en faja

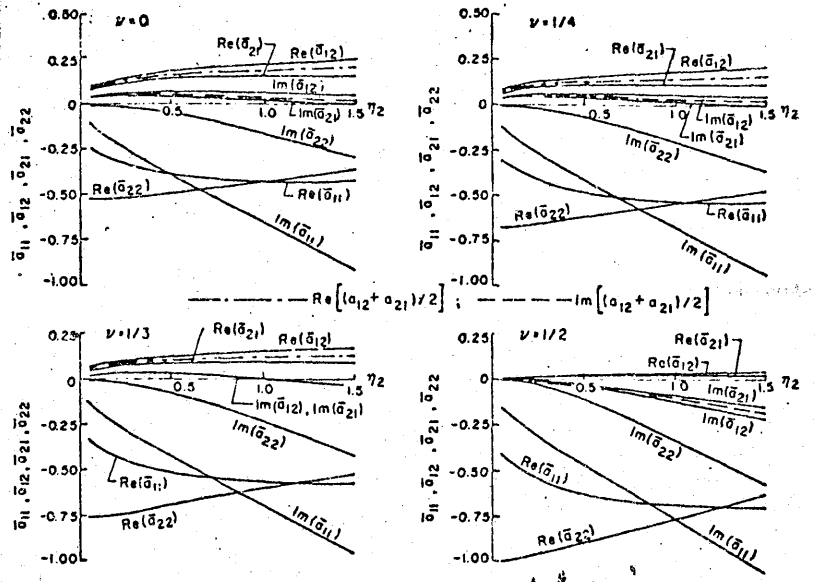
Si el caso axisimétrico representa una posibilidad de simplificación del problema matemático, la carga en faja infinita corresponde al caso de deformación plana, igualmente tratable en forma matemática.

El trabajo mas interesante al respecto fue publicado por KARASUDHI, KEER & LEE en 1968 que trataron los casos de desplazamientos verticales, horizontales y de giro. Previamente AWOJOB(1966) habia presentado resultados al caso de movimiento de giro.

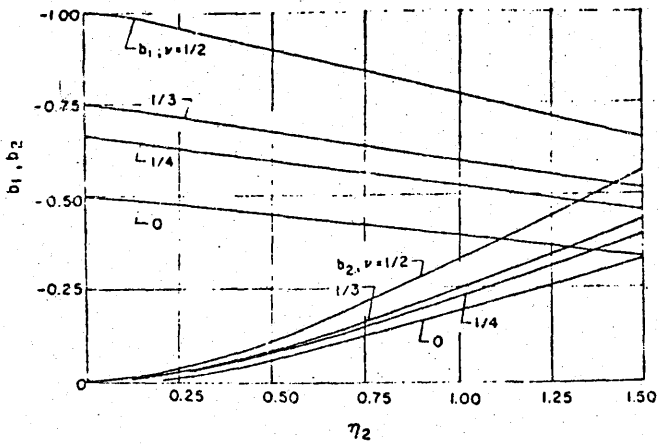
Análogamente a los problemas tridimensionales el caso bidimensional - está regido por un conjunto de ecuaciones integrales que, con las hipótesis habituales, pueden reducirse a una ecuación de FREDHOLM de segunda especie.



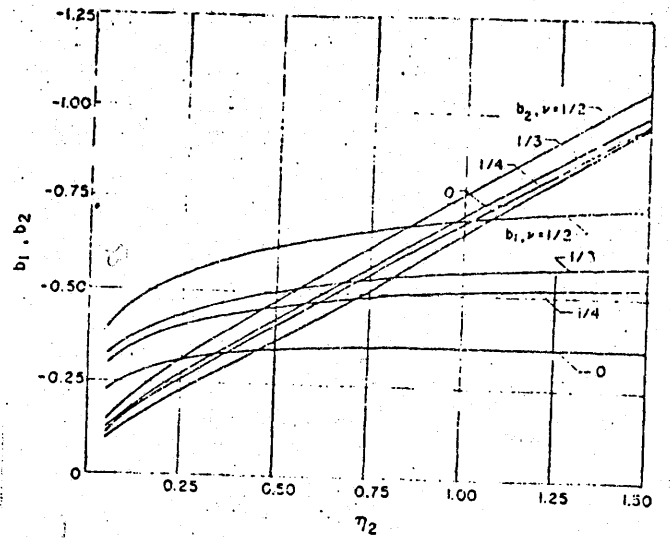
Equivalent stiffnesses versus frequency factor, vertical vibration



Stiffnesses versus frequency factor, coupled horizontal and rocking vibration



Equivalent stiffnesses versus frequency factor, uncoupled rocking



Equivalent stiffnesses versus frequency factor, uncoupled horizontal vibration

Fig. 21

La discretización en este caso se ha limitado a la interfase ya que se comprobó la escasa influencia de los elementos fuera de la zona de contacto (ALARCON et al. (1978)). Pueden observarse los magníficos resultados que una discretización somera produce y la concordancia con los resultados anteriores y los de LUCO (1975) y JAKUB (1977).

El número de elementos se puede todavía reducir si se utilizan elementos singulares que recojan los infinitos que se producen en los extremos de la placa, habiéndose llegado a los resultados con errores inferiores al 5% usando solamente dos elementos (ALARCON et al. 1979).

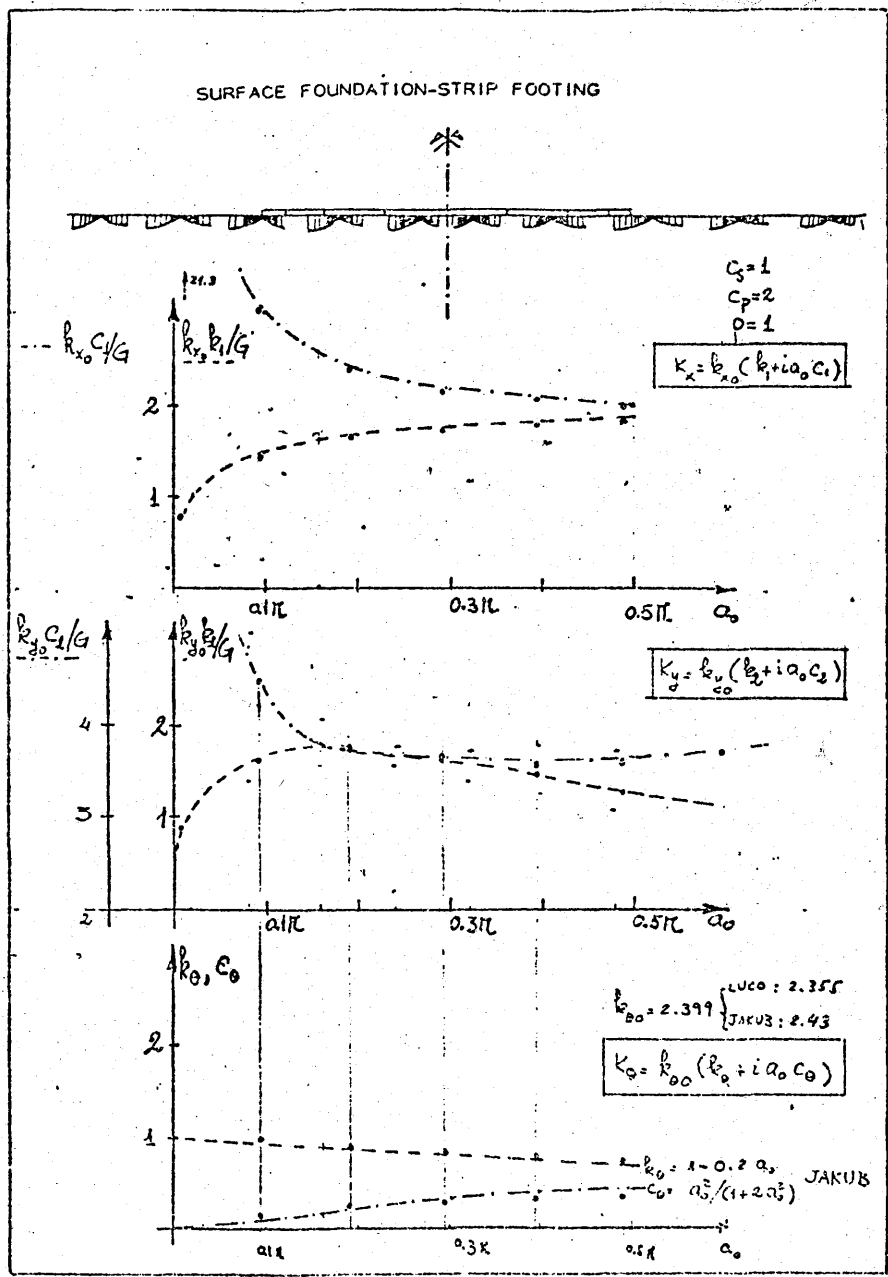


Fig. 22

1.6.--Cimientos rectangulares

Los primeros intentos de solución de cimientos rectangulares siguieron la tendencia marcada por las investigaciones de REISSNER, es decir, el uso de las funciones derivadas por LAMB.

KOBORI et al. (1966) obtuvieron sus resultados suponiendo una distribución uniforme de tensiones (incompatible por tanto con la hipótesis rígida) y obteniendo luego un desplazamiento ponderado.

ELORDUY et al. (1967), por su parte recurrieron a un método semejante al de LYSMER, consistente en dividir la superficie de contacto en una serie de rectángulos en los que se sustituía la presión por su resultante en el centro. Mediante las fórmulas de LAMB se obtiene la deflexión en el centro de cada rectángulo elemental y el conjunto se organiza en una serie de ecuaciones lineales obligando a que se cumplan las condiciones de movimientos de sólido rígido. En los términos de la diagonal se produce un infinito, cosa que fue evitada desplazando el punto de observación. Ello influye en la precisión de los resultados y, dada la importancia de los referidos términos, exige una discretización muy refinada para obtener resultados apreciables.

No obstante este procedimiento ha sido durante algunos años el único existente y en él se basan las reglas recomendadas por RICHART.

En esencia estas reglas recomiendan el uso de los siguientes valores del muelle equivalente.

Modo de vibración	k_{eq} Cimiento rectangular
Vertical	$\frac{G}{1-\nu} \sqrt{4cd} \beta_z$
Horizontal	$\frac{4(1+\nu)}{G} \beta_x \sqrt{cd}$
Giro	$\frac{G}{1-\nu} \beta_\psi \frac{8}{c} d^2$
Torsión	Usar radio equivalente

donde los coeficientes β se obtienen de la fig. 23.

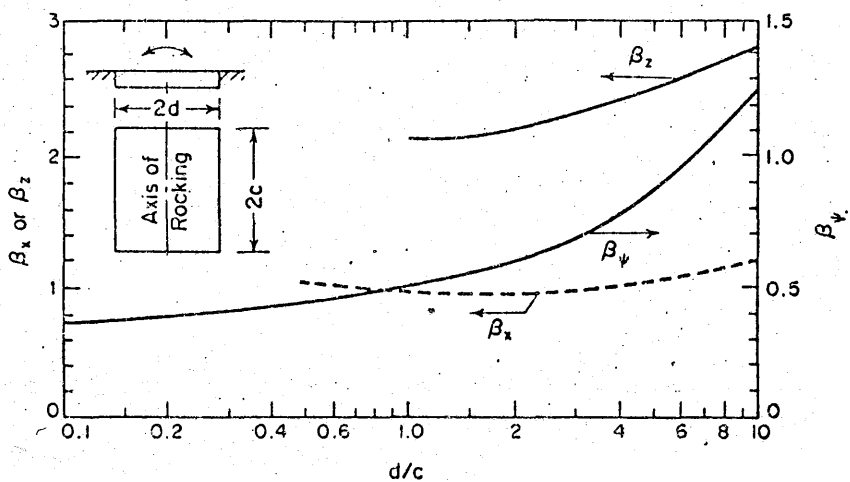


Fig. 23.

Para los valores de amortiguamiento se recomienda el uso de un radio - equivalente con el que se pueda recurrir a las tablas de zapata circular.

Dichos valores son

Modo de vibración	r_o equivalente
Traslación	$\sqrt{\frac{4 c d}{\pi}}$
Giro	$\sqrt{\frac{16 c d^3}{3 \pi}}$
Torsión	$\sqrt{\frac{16 c d (c^2 + d^2)}{6 \pi}}$

donde:

- $2 c$ = ancho del cimiento (a lo largo del eje de giro)
- $2 d$ = longitud del cimiento (en el plano de giro)

Con posterioridad WONG y LUCO (1976) han presentado un método semejante aplicable a un cimiento arbitrario. La solución utiliza una integral doble que se calcula por un método numérico teniendo en cuenta la existencia de una singularidad. El método adolece de una cierta lentitud de

cálculo. Finalmente DOMINGUEZ (1978) ha aplicado el B.I.E.M. al problema. El tipo de elementos utilizados es el constante y la solución fundamental la correspondiente al KELVIN dinámico desarrollada por - - STERNBERG & EUBANKS (), DOYLE (); CRUSE & RIZZO () etc.

El sistema se reduce a un conjunto de ecuaciones

$$\underline{H} \underline{u} = \underline{G} \underline{t} \quad (54)$$

donde en \underline{u} se recogen los movimientos y en \underline{t} las tensiones en cada elemento.

La condición de sólido rígido se impone directamente dando movimientos unidad tanto de traslación como de giro, y las fuerzas resultantes se obtienen como suma de los productos de las t_j por las áreas elementales.

El método es muy efectivo y, con tan solo una subdivisión 3 x 3 permite resultados aceptables..

En las Figs. 24 a 29 se recogen los resultados de las diferentes rigideces y amortiguamientos para diversas proporciones de la zapata.

Dichos resultados corresponden a la forma general de presentación

$$P = K (k + i a_o c) \quad (55)$$

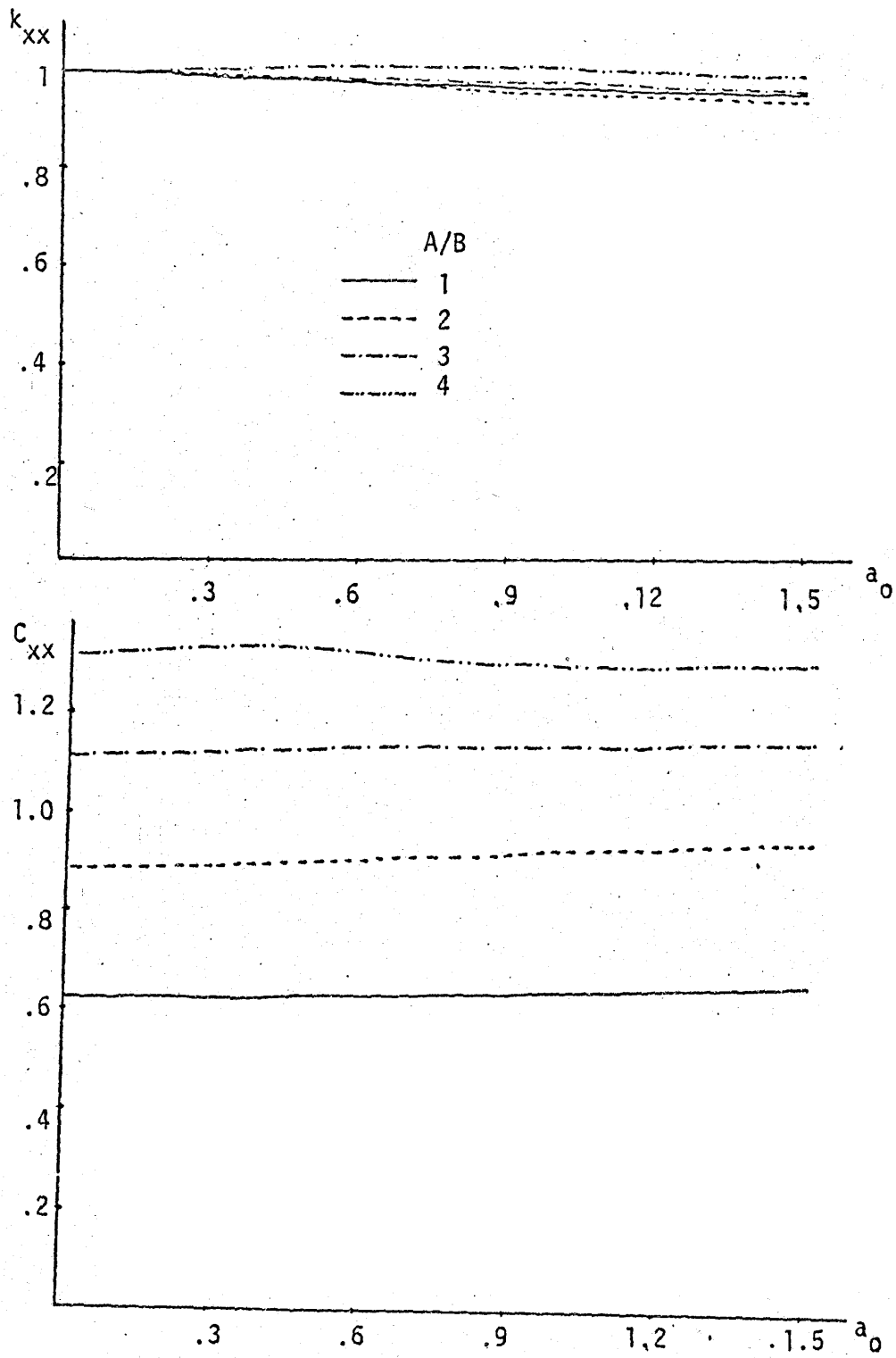


Figure 24 - Horizontal Stiffness Coefficients

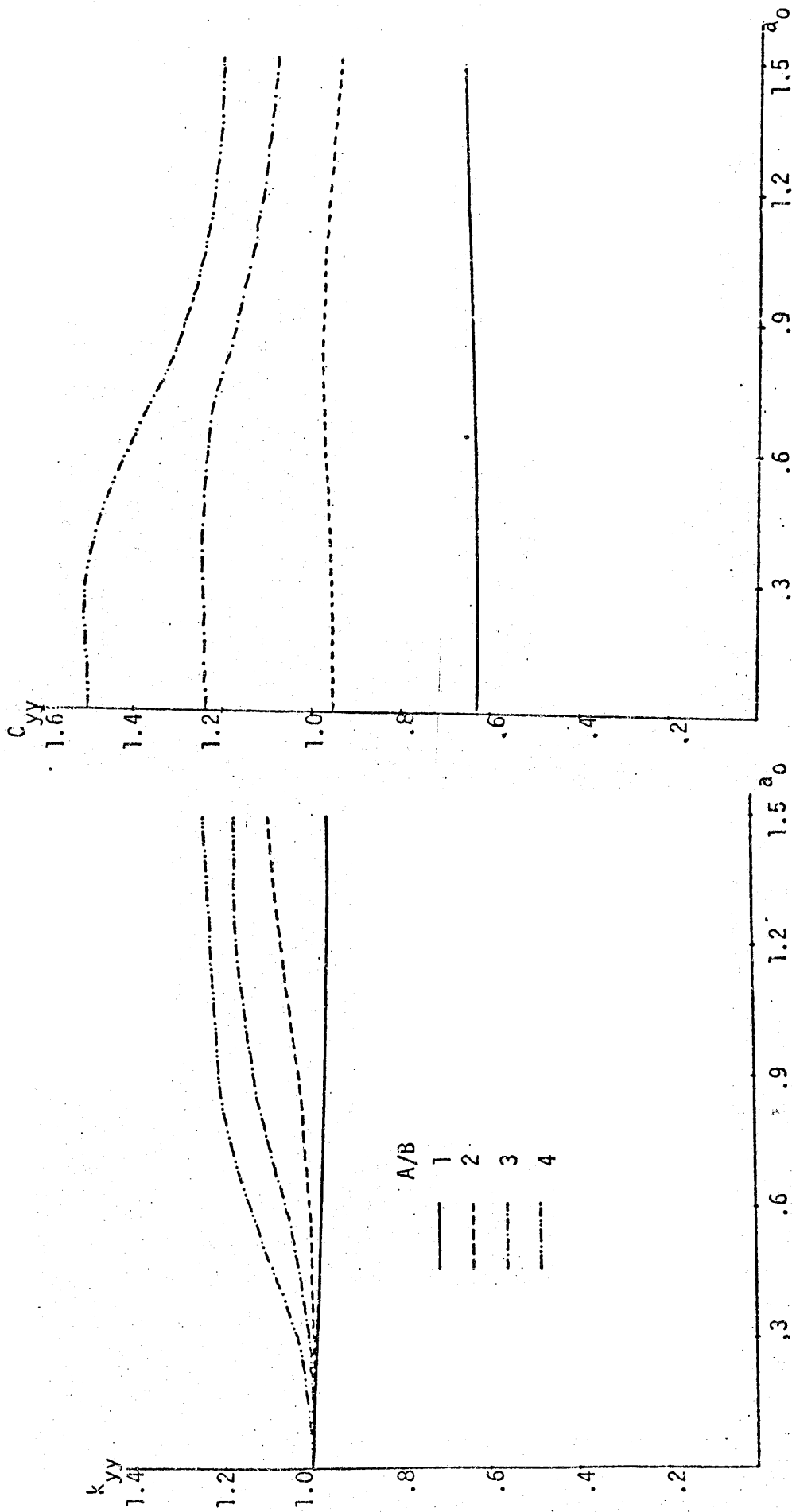


Figure 25 - Horizontal Stiffness Coefficients.

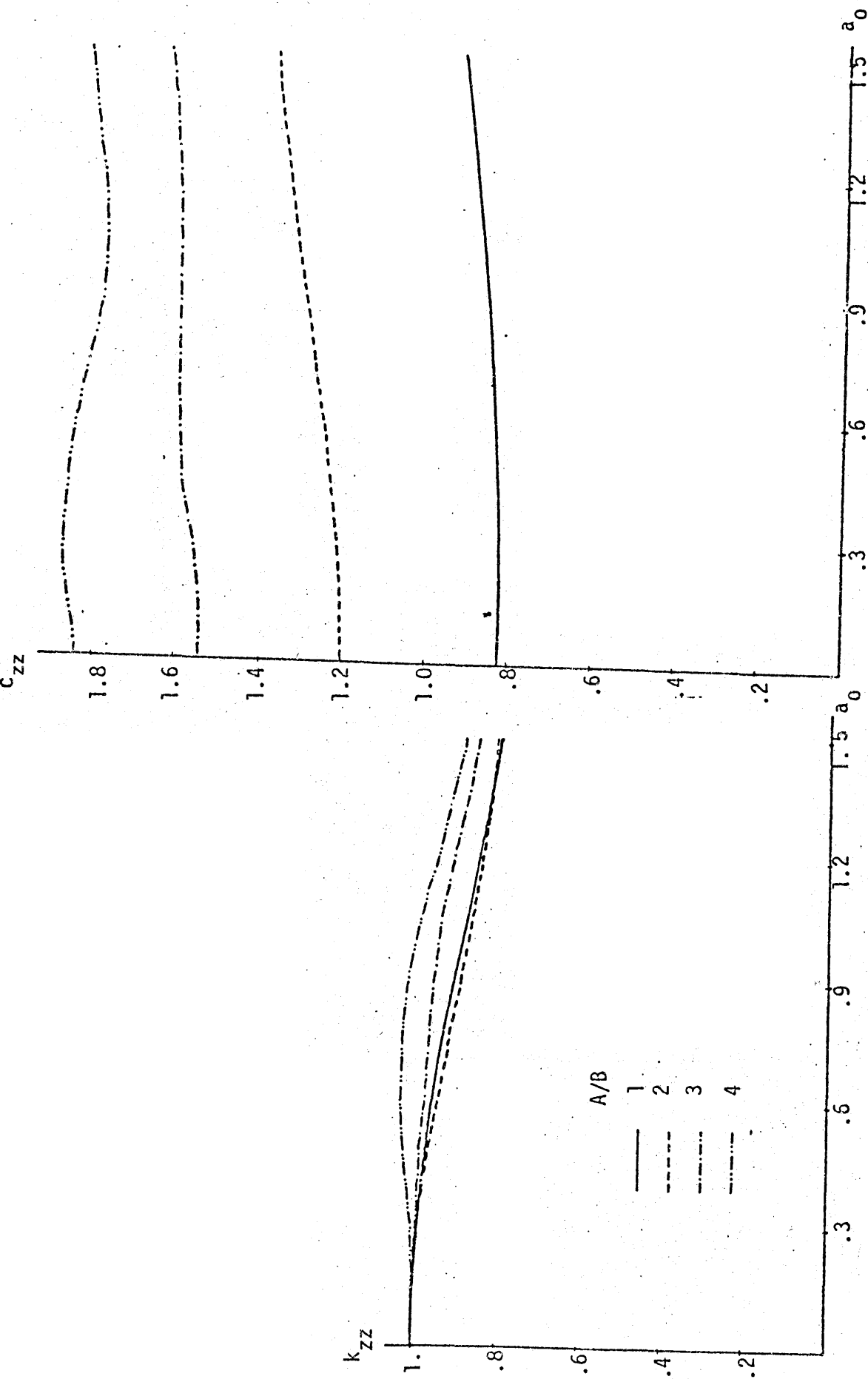


Figure 26 - Vertical Stiffness Coefficients

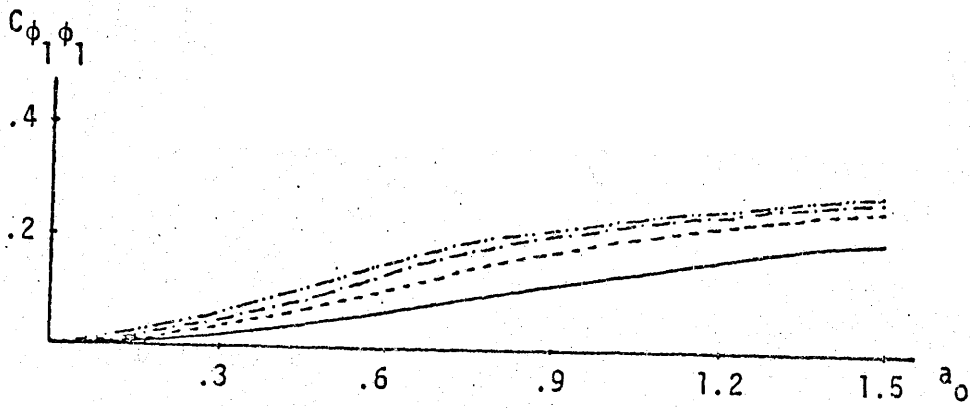
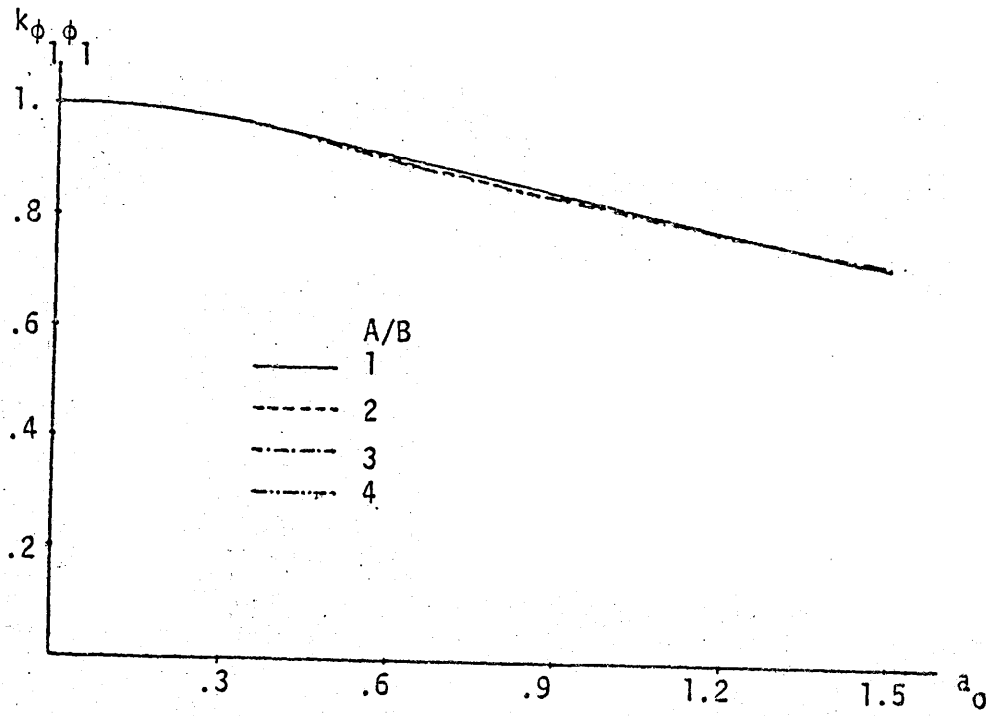


Figure 27 - Rocking Stiffness Coefficients

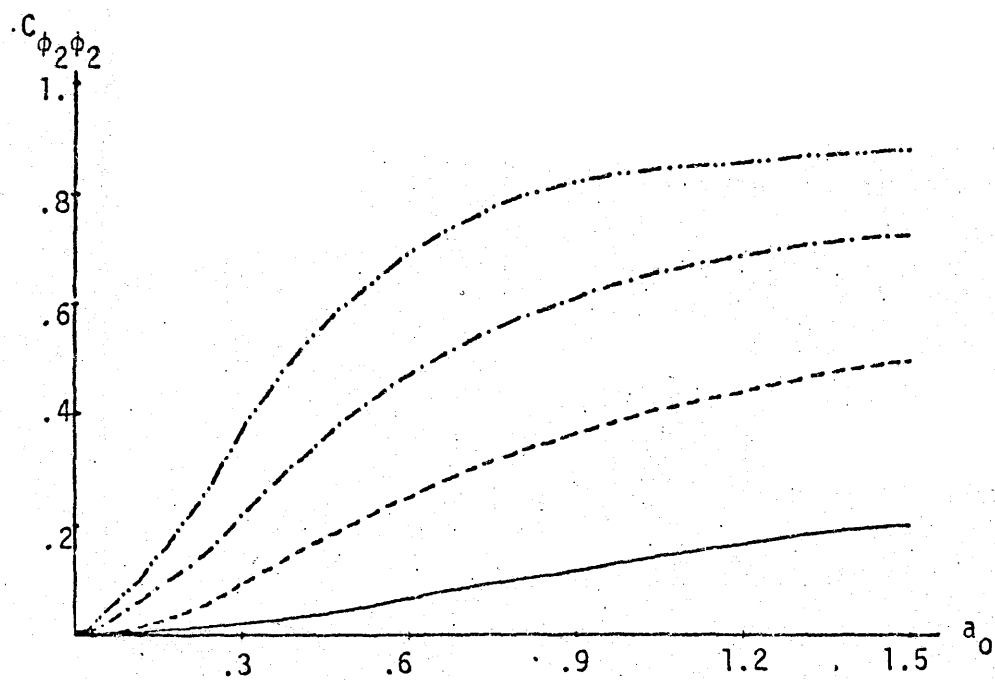
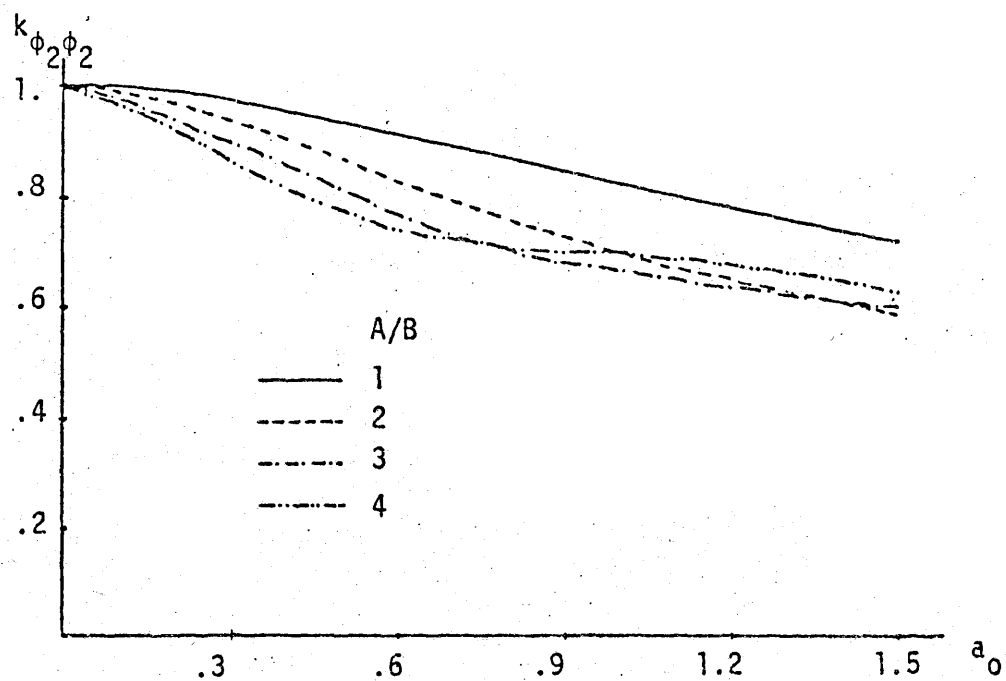


Figure 28 - Rocking Stiffness Coefficients.

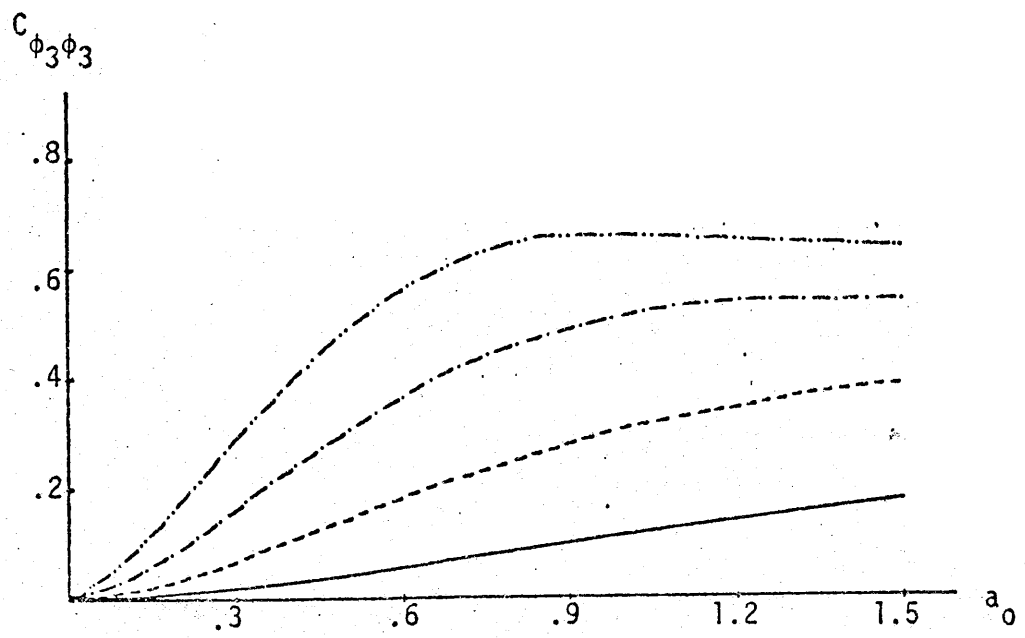
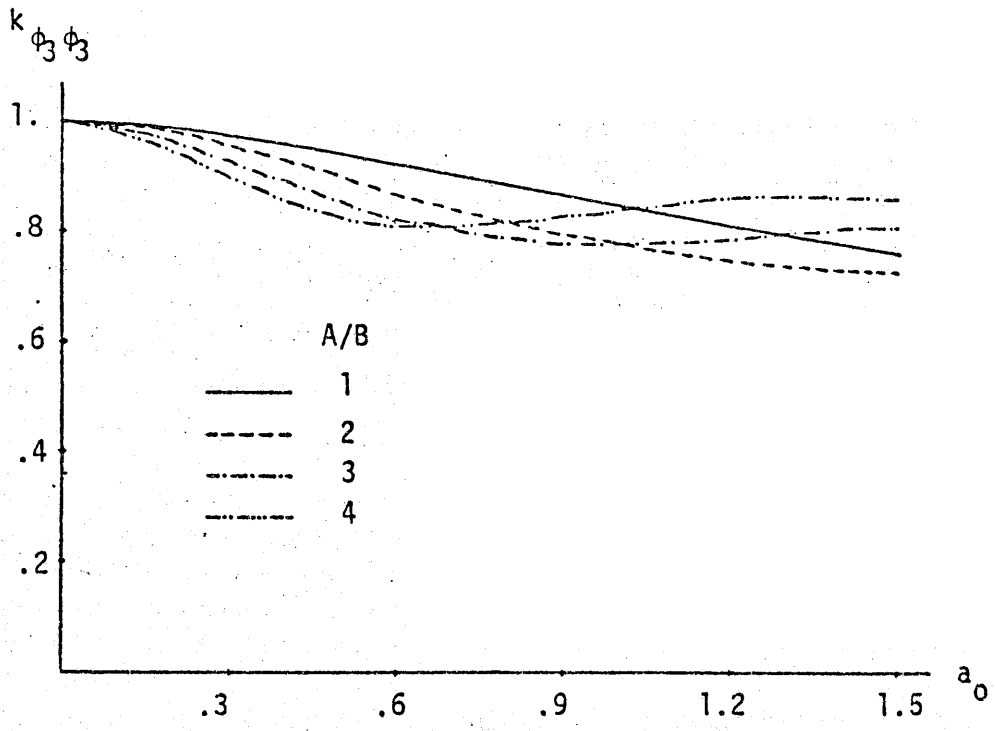


Figure 29 - Torsional Stiffness Coefficients.

1.7.--Cimientos empotrados

La importancia de que el cimiento estuviese incluido dentro del terreno fue reconocida desde muy pronto en todos los estudios de interacción. El problema sin embargo, no admite un tratamiento sencillo aunque algunos autores (WHITMAN, 1972) han presentado coeficientes correctores de las expresiones de las constantes elásticas y de amortiguamiento expuestas en los apartados anteriores.

Con independencia de los resultados obtenibles mediante procedimientos numéricos, las fórmulas mas llamativas han sido propuestas por NOVAK y su escuela.

La idea de NOVAK consiste en considerar por separado las contribuciones del semiespacio situado baja la zapata (para lo que se utilizan vg: las expresiones de VELETSOS) y las del terreno adyacente. Este se supone dividido en capas cuya respuesta se estudia independientemente. En algunos casos, como el de movimiento horizontal, el cilindro moviéndose en la placa agujereada no puede ser mantenido en equilibrio cuando la frecuencia decrece (tal como sucede en el caso de cimiento en faja) lo que obliga a tomar hipótesis adicionales.

La fórmulas de NOVAK se presentan en forma ligeramente distinta a la utilizada hasta ahora. Por ejemplo, para el caso de vibraciones verticales se toman por separado los coeficientes de rigidez y amortiguamiento

$$\begin{aligned} k &= G r_o \left(C_{w1} + \frac{G_s}{G} \delta S_{w1} \right) \\ c &= r_o^2 \sqrt{\rho G} \left(C_{w2} + \bar{S}_{w2} \delta \sqrt{\frac{\rho s}{\rho}} \frac{G_s}{G} \right) \end{aligned} \quad (56)$$

con lo que $P = k w + c \dot{w}$

Poniendo $\dot{w} = i \omega w$

$$P = (k + i \omega c) w \quad (57)$$

En el caso de cimiento superficial

$$\begin{aligned} c_s &= \sqrt{\frac{G}{\rho}} \\ \frac{G}{c_s} &= \sqrt{\rho G} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k + i \omega c &= G r_o C_{w1} + i \omega r_o^2 \sqrt{\rho G} \bar{C}_{w2} = \\
 &= G r_o C_{w1} + i \omega r_o^2 \frac{G}{c_s} \bar{C}_{w2} = \\
 &= G r_o \left(C_{w1} + i \frac{\omega r_o}{c_s} \bar{C}_{w2} \right)
 \end{aligned} \tag{58}$$

que permite una inmediata identificación con las fórmulas de VELETSOS

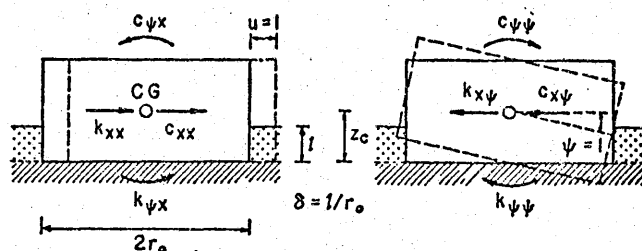
$$P = \frac{8 G r_o}{2 - \nu} (k_z + i a_o c_z)$$

En este caso

$$\begin{aligned}
 C_{w1} &= \frac{8}{2 - \nu} k_z \\
 \bar{C}_{w2} &= \frac{8}{2 - \nu} c_z
 \end{aligned} \tag{59}$$

Las fórmulas de Novak son las siguientes:

ZAPATAS CILINDRICAS EMPOTRADAS FORMULAS DE NOVAK.



VIBRACIONES VERTICALES

$$k_{zz} = G r_o \left(C_{w1} + \frac{G_s}{G} \delta S_{w1} \right)$$

$$c_{zz} = r_o^2 \sqrt{\rho G} \left[\bar{C}_{w2} + S_{w2} \delta \sqrt{\left(\frac{\rho_s G_s}{\rho G} \right)} \right]$$

$$k_{\zeta\zeta} = Gr_0^3 \left(C_{\zeta 1} + \frac{G_s}{G} \delta S_{\zeta 1} \right)$$

$$c_{\zeta\zeta} = r_0^4 \sqrt{(\rho G)} \left[\bar{C}_{\zeta 2} + \bar{S}_{\zeta 2} \delta \sqrt{\left(\frac{\rho_s}{\rho} \frac{G_s}{G} \right)} \right]$$

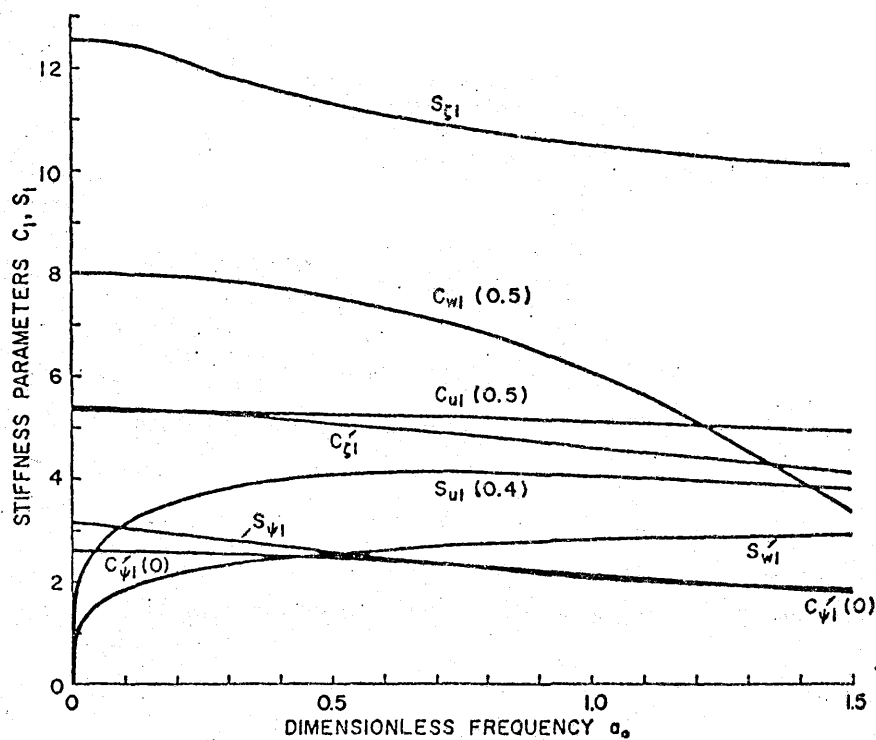
VIBRACIONES DE TORSION

$$\left. \begin{aligned} k_{xx} &= Gr_0 \left(C_{u1} + \frac{G_s}{G} \delta S_{u1} \right) \\ k_{\psi\psi} &= Gr_0^3 \left[C_{\psi 1} + \left(\frac{z_c}{r_0} \right)^2 C_{u1} + \frac{G_s}{G} \delta S_{\psi 1} + \frac{G_s}{G} \delta \left(\frac{\delta^2}{3} + \frac{z_c^2}{r_0^2} - \delta \frac{z_c}{r_0} \right) S_{u1} \right] \\ k_{x\psi} &= -Gr_0 \left[z_c C_{u1} + \frac{G_s}{G} \delta (z_c - \frac{1}{2} l) S_{u1} \right] \end{aligned} \right\}$$

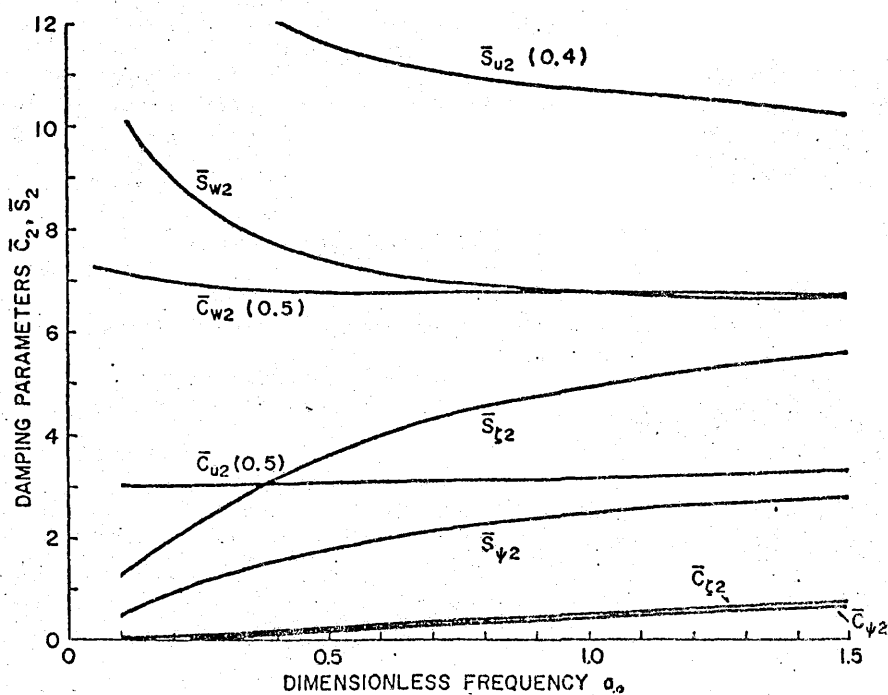
$$\left. \begin{aligned} c_{xx} &= \sqrt{(\rho G)} r_0^2 \left[\bar{C}_{u2} + \delta \sqrt{\left(\frac{\rho_s}{\rho} \frac{G_s}{G} \right)} \bar{S}_{u2} \right] \\ c_{\psi\psi} &= \sqrt{(\rho G)} r_0^4 \left[\bar{C}_{\psi 2} + \left(\frac{z_c}{r_0} \right)^2 \bar{C}_{u2} + \delta \sqrt{\left(\frac{\rho_s}{\rho} \frac{G_s}{G} \right)} \left[\bar{S}_{\psi 2} + \left(\frac{\delta^2}{3} + \frac{z_c^2}{r_0^2} - \delta \frac{z_c}{r_0} \right) \bar{S}_{u2} \right] \right] \\ c_{x\psi} &= -\sqrt{(\rho G)} r_0^2 \left[z_c \bar{C}_{u2} + \delta \sqrt{\left(\frac{\rho_s}{\rho} \frac{G_s}{G} \right)} (z_c - \frac{1}{2} l) \bar{S}_{u2} \right] \end{aligned} \right\}$$

VIBRACIONES ACOPLADAS DE TRASLACION Y GIRO

Los valores de los diferentes parámetros pueden extraerse de las siguientes curvas (NOVAK 1974)



Examples of stiffness parameters C_1 and S_1 . (Poisson's ratio given in brackets)



Examples of damping parameters \bar{C}_2 and \bar{S}_2 . (Poisson's ratio given in brackets)

Fig. 30

Aunque se observa que los parámetros indicados varían con la frecuencia, NOVAK propone también una serie de valores prácticos que se recogen en la tabla siguiente

Motion	Soil	Side layer		Half-space	
Sliding	Cohesive Granular	$S_{u1} = 4.1$	$\bar{S}_{u2} = 10.6$	$C_{u1} = 5.1$	$\bar{C}_{u2} = 3.2$
		$S_{u1} = 4.0$	$\bar{S}_{u2} = 9.1$	$C_{u1} = 4.7$	$\bar{C}_{u2} = 2.8$
Rocking	Cohesive Granular	$S_{\psi 1} = 2.5$	$\bar{S}_{\psi 2} = 1.8$	$C_{\psi 1} = 4.3$	$\bar{C}_{\psi 2} = 0.7$
				$C_{\psi 1} = 3.3$	$\bar{C}_{\psi 2} = 0.5$
Torsion	Cohesive Granular	$S_{t1} = 10.2$	$\bar{S}_{t2} = 5.4$	$C_{t1} = 4.3$	$\bar{C}_{t2} = 0.7$
Vertical	Cohesive Granular	$S_{w1} = 2.7$	$\bar{S}_{w2} = 6.7$	$C_{w1} = 7.5$	$\bar{C}_{w2} = 6.8$
				$C_{w1} = 5.2$	$\bar{C}_{w2} = 5.0$

En algunos casos particulares se han propuesto también fórmulas polinómicas. Así en el caso de torsión NOVAK y SACHS () sugieren

$$a_e = \sqrt{[a_0^2 - r_0^2/h^2]}$$

Table II. Stiffness and damping parameters for torsional vibration

Stiffness and damping parameters	Constant parameters	Validity range
Side layer		
$S_{t1} = 12.58 - 1.01a_0 - 5.912a_0^2$	$\bar{S}_{t1} = 12.4$	$0 \leq a_0 \leq 0.2$
$S_{t1} = 12.59 - 1.855a_0 - 3.349a_0^2 + 5.335a_0^3 - 2.76a_0^4 + 0.495a_0^5$	$\bar{S}_{t1} = 10.2$	$0.2 \leq a_0 \leq 2.0$
$S_{t2} = 9.04a_0^2$	$\bar{S}_{t2} = 2.0$	$0 \leq a_0 \leq 0.2$
$S_{t2} = 7.5a_0 - \frac{3.726a_0}{0.455 + a_0}$	$\bar{S}_{t2} = 5.4$	$0.2 \leq a_0 \leq 2.0$
Half space*		
$C_{t1} = 5.333 + 0.032a_0 - 1.358a_0^2 + 0.7434a_0^3 - 0.1414a_0^4$	$\bar{C}_{t1} = 4.3$	$0 \leq a_0 \leq 2.0$
$C_{t2} = 0.486a_0^2$	$\bar{C}_{t2} = 0.7$	$0 \leq a_0 \leq 2.0$
Stratum $h/r_0 = 0.5^*$		
$C_{t1} = 6.78 - 0.5377a_0 + 0.4545a_0^2 - 0.2206a_0^3$	$\bar{C}_{t1} = 6.5$	$0 \leq a_0 \leq 2.5$
$C_{t2} = 0$	$\bar{C}_{t2} = 0$	$0 \leq a_0 \leq 3.14$
Stratum $h/r_0 = 1.0^*$		
$C_{t1} = 5.75 - 0.4191a_0 + 1.381a_0^2 - 2.115a_0^3 + 0.5927a_0^4$	$\bar{C}_{t1} = 5.2$	$0 \leq a_0 \leq 2.00$
$C_{t2} = 0$	$\bar{C}_{t2} = 0$	$0 \leq a_0 \leq 1.57$
$C_{t2} = -6.28 + 4.0a_0$	$\bar{C}_{t2} = 0.6$	$1.57 \leq a_0 \leq 2.00$
Any stratum thickness†		
$C_{t1} = 5.333 - 1.0678a_0^2 + 0.5607a_0^4 - 0.2715a_0^6 + 0.0739a_0^8 - 0.0109a_0^{10}$	Depends on h/r_0	$\left\{ \begin{array}{l} a_0 > r_0/h \\ a_0 \leq 2.0 \end{array} \right.$
$C_{t2} = 0.755a_0^3 - 0.4228a_0^5 + 0.1631a_0^7 - 0.0302a_0^9 + 0.00204a_0^{11}$		

* Derived from Bycroft.⁹
† Derived from Awojobi.¹

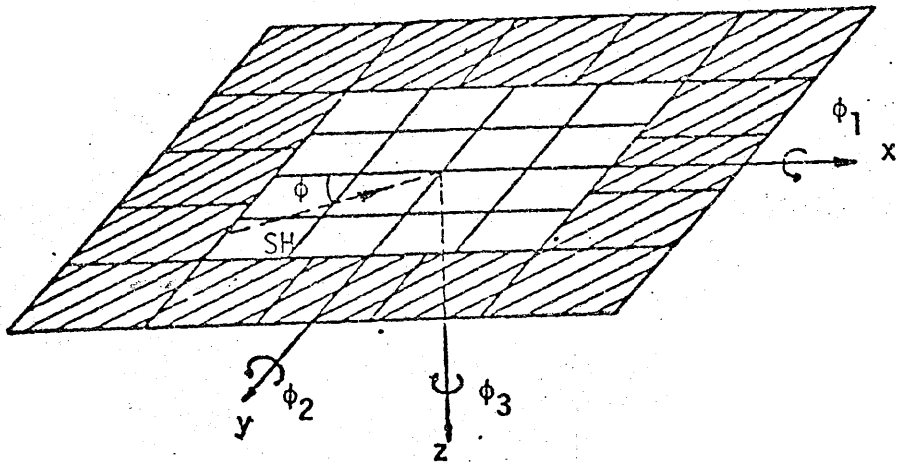
En las ecuaciones anteriores G , ρ son las características del suelo a nivel inferior del cimiento y G_s , ρ_s las correspondientes al relleno lateral. $\rho = 1/r_o$ es el índice de empotramiento, la profundidad de empotramiento y z_o altura del punto de referencia respecto a la base.

Para cimientos rectangulares se han realizado diferentes estudios con elementos finitos. Creemos sin embargo, que los resultados mas interesantes son los de DOMINGUEZ (1978) en el trabajo citado anteriormente.

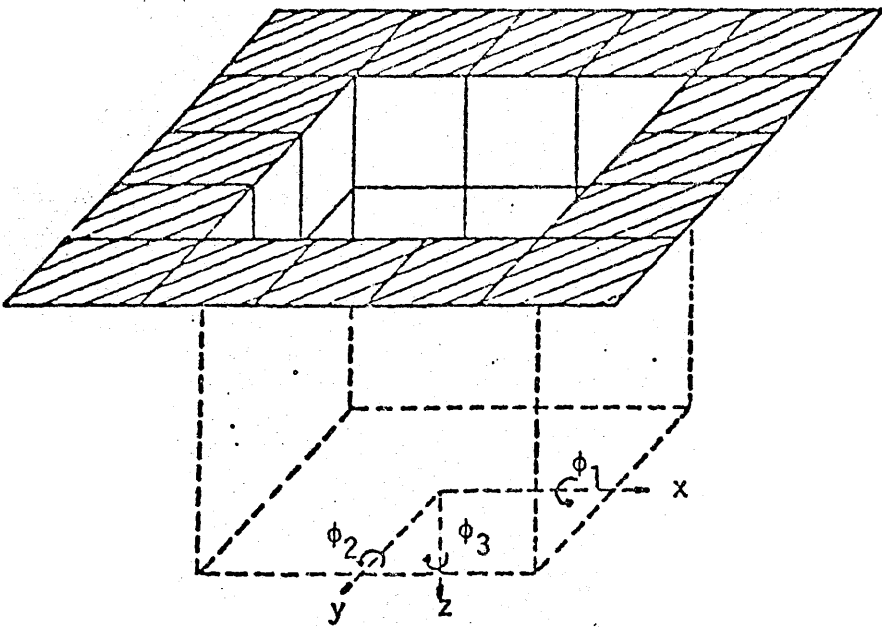
En las Figs. 31 a 36 se recogen los resultados para zapata cuadrada y en las 37 a 45 los relativos a una zapata rectangular de canto doble que el ancho, todo ello para diferentes proporciones de inmersión E/B donde E es la profundidad de empotramiento y B el lado menor de la zapata.

Puede observarse que el empotramiento aumenta las partes real e imaginaria de la rigidez, aunque el incremento de la parte real tiende a anularse cuando la frecuencia aumenta.

Puede observarse también que el centro de empuje tiende a estar situado alrededor del tercio de la altura como fue sugerido por KAUSEL - (1974)



- Model for Surface Foundation and System of Coordinates



- Embedded Foundation

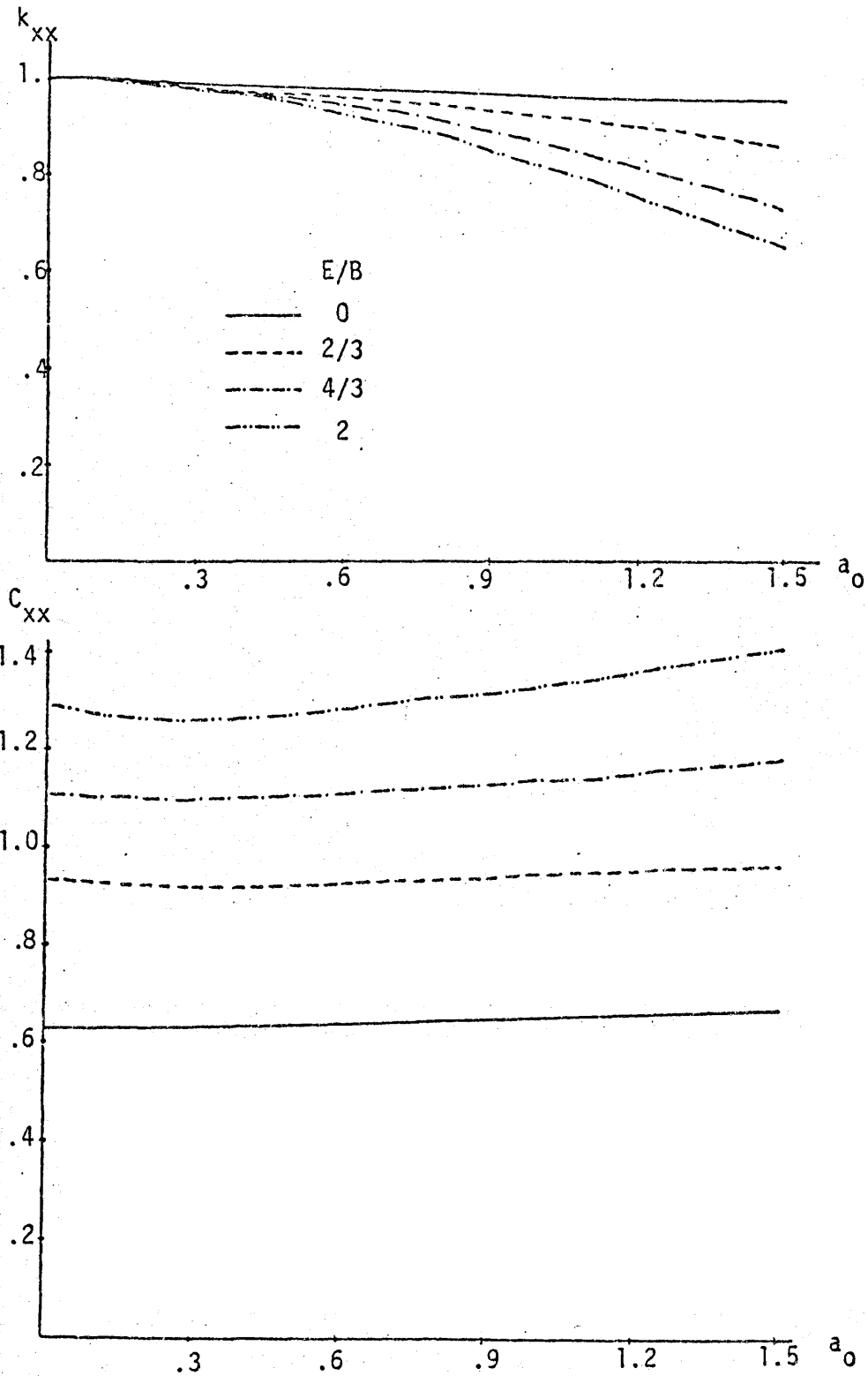


Figure 31 - Horizontal Stiffness Coefficients. Square Embedded Foundation.

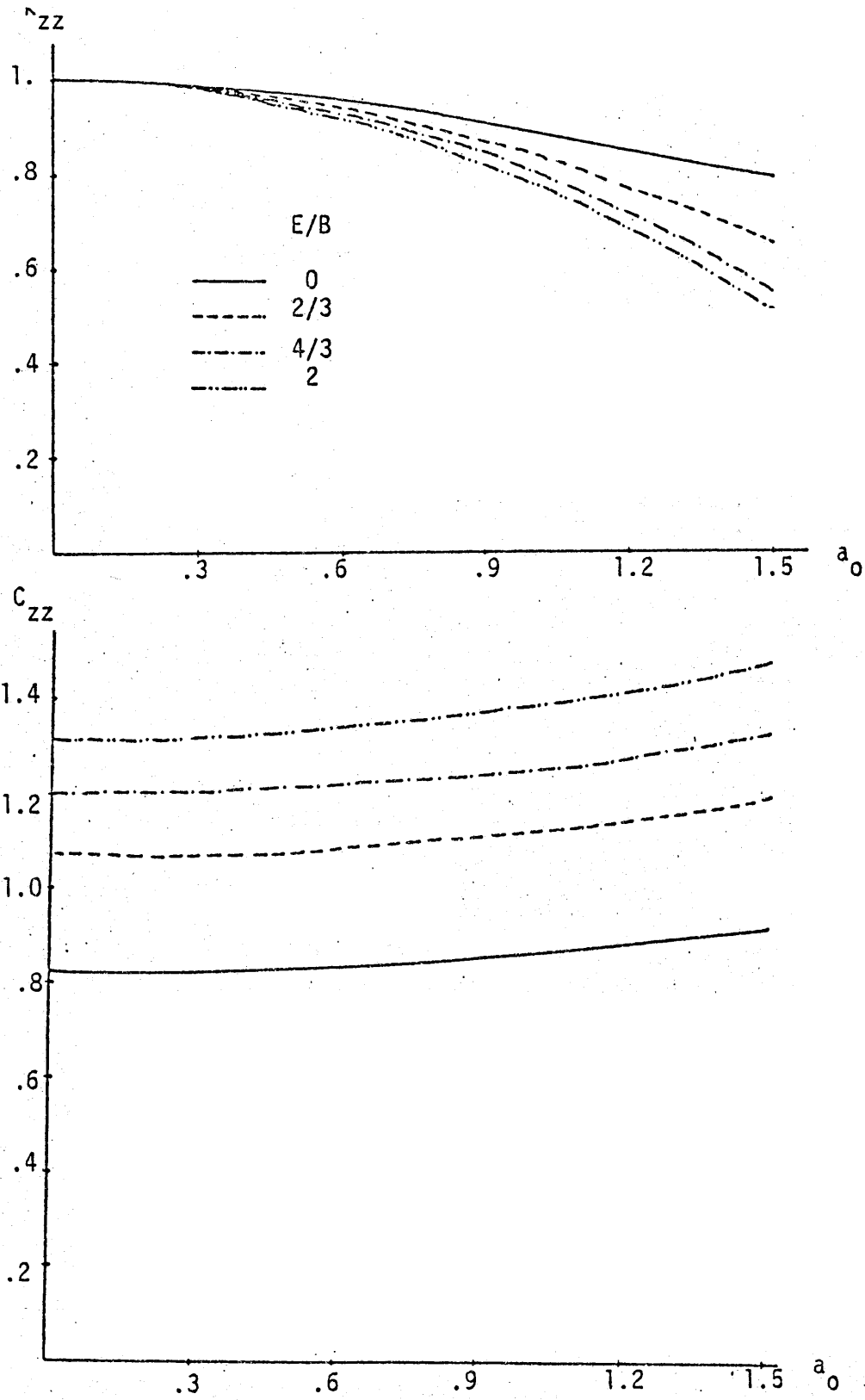


Figure 32 - Vertical Stiffness Coefficients. Square Embedded Foundation.

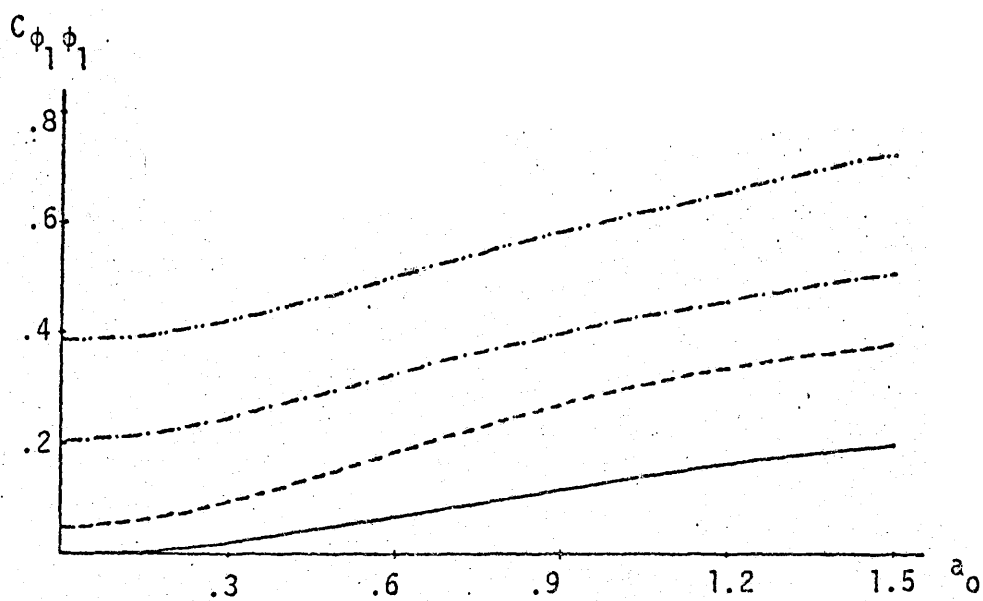
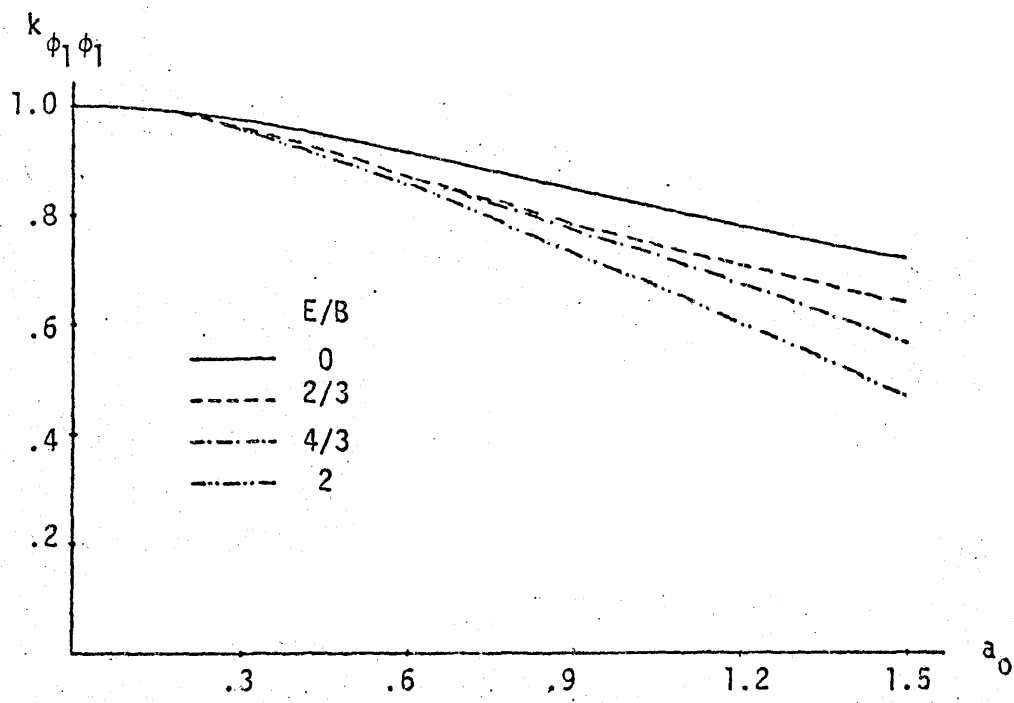


Figure 33 - Rocking Stiffness Coefficients. Square Embedded Foundation.

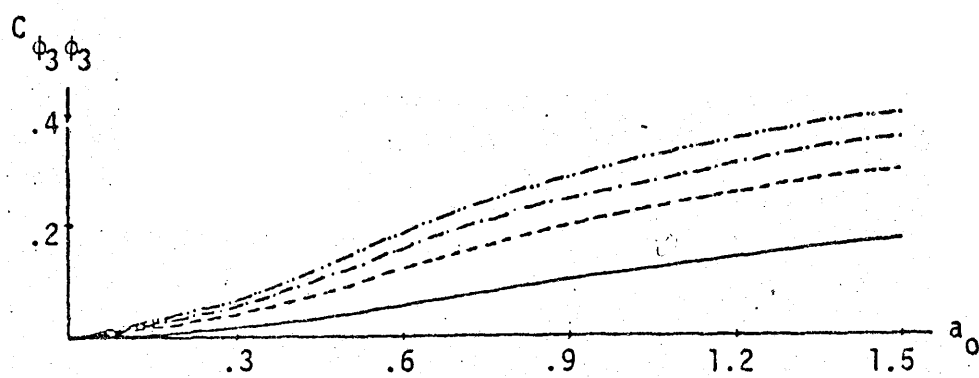
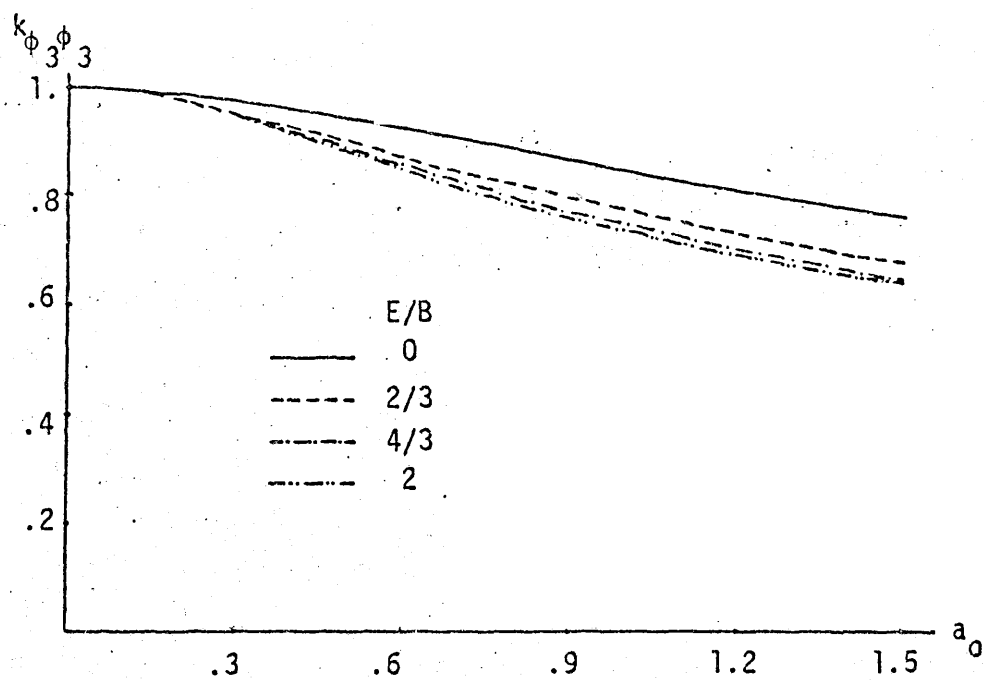


Figure 34 - Torsional Stiffness Coefficients. Square Embedded Foundation.

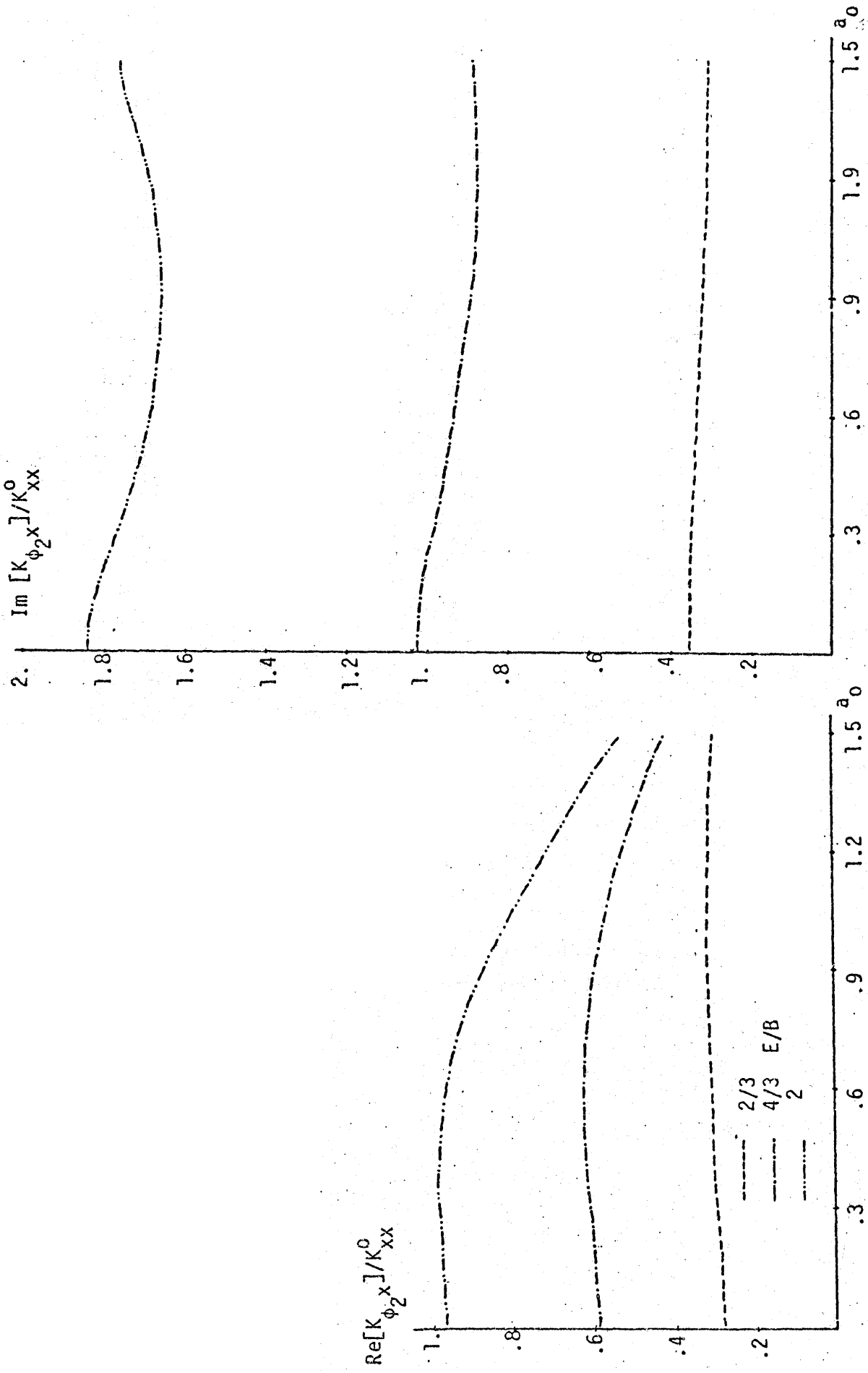


Figure 35 - Cross Coupling Stiffness. Square Embedded Foundation.

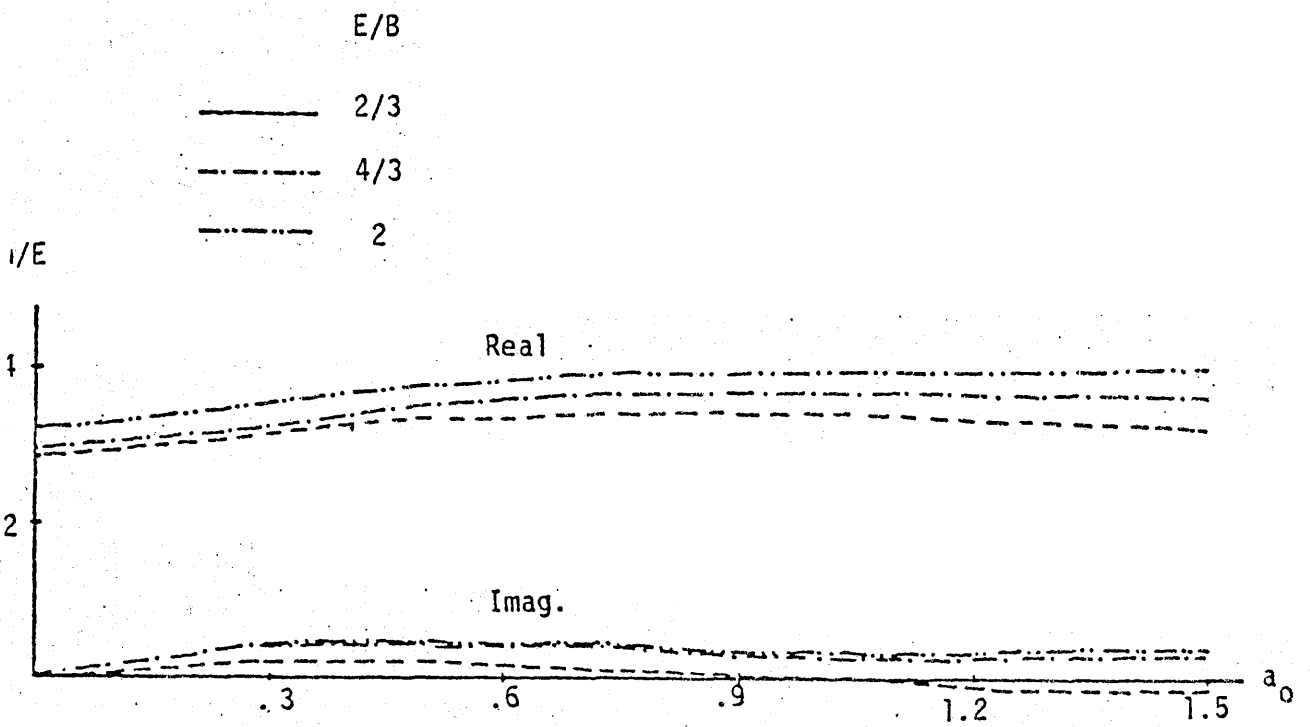


Figure 36 - Height of the Center of Stiffness for Square Embedded Foundation.

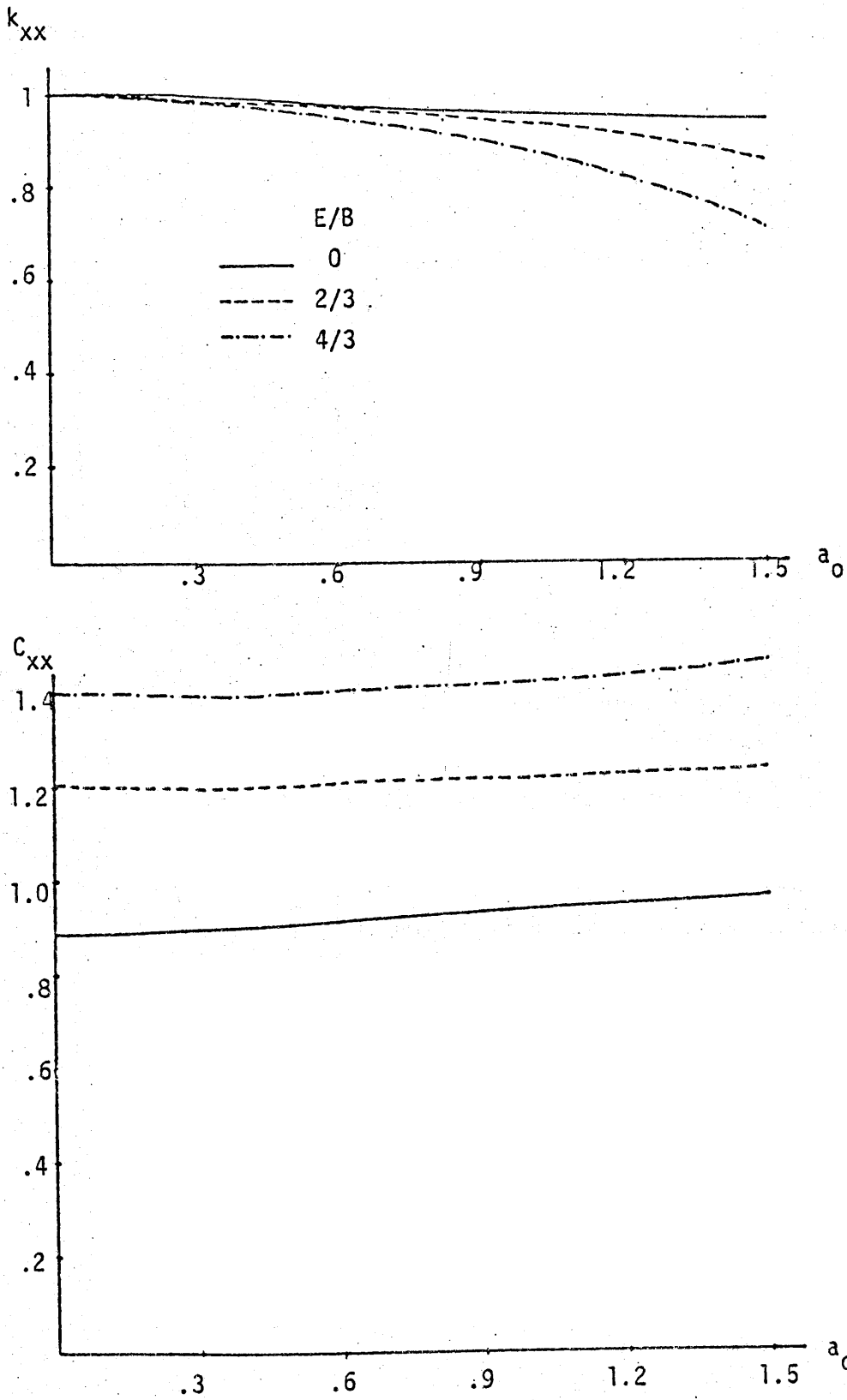


Figure 37 - Horizontal Stiffness Coefficients. Rectangular Foundation. $A = 2B$

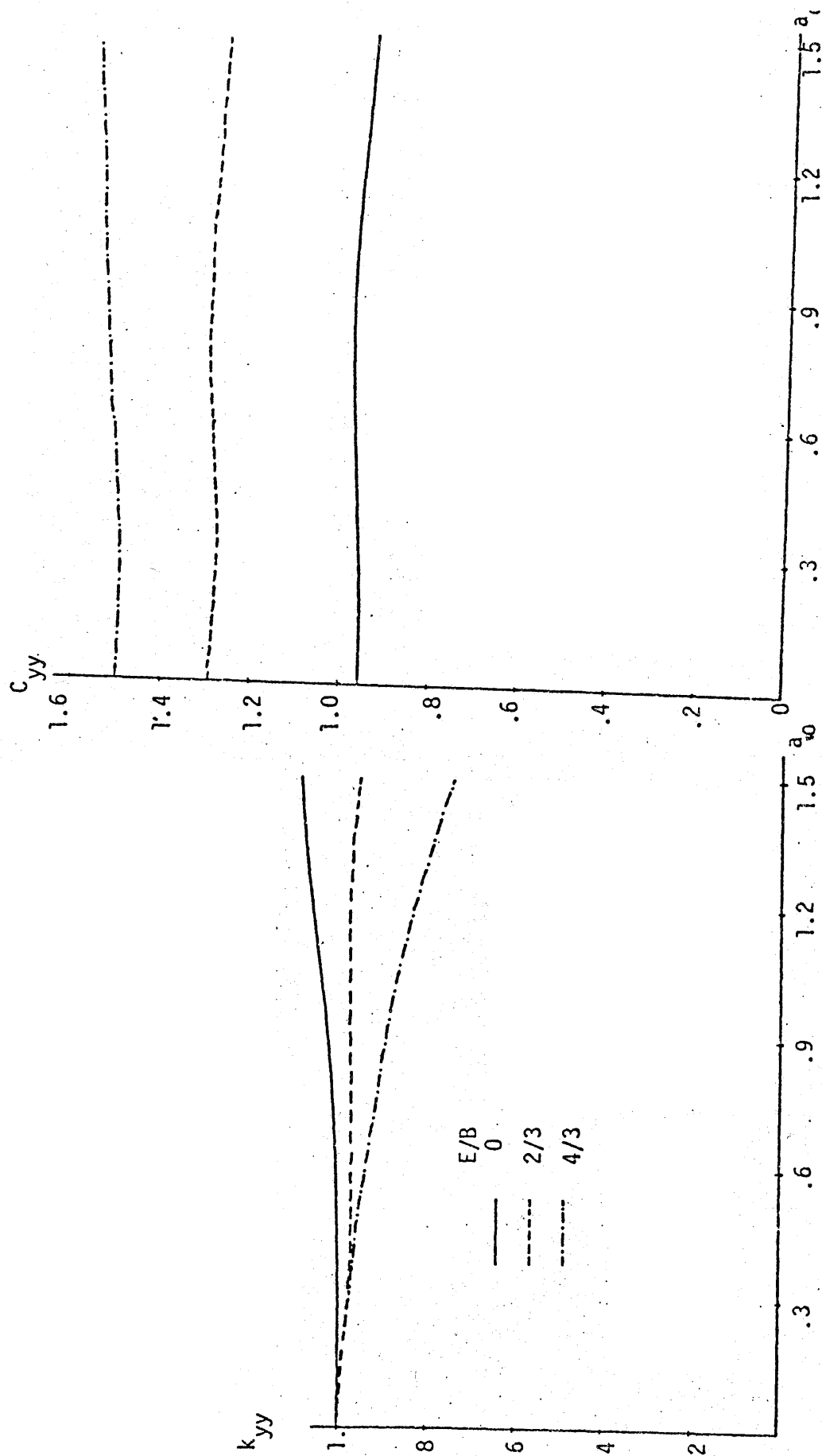


Figure 38 - Horizontal Stiffness Coefficients. Rectangular Foundations. $A = 2B$.

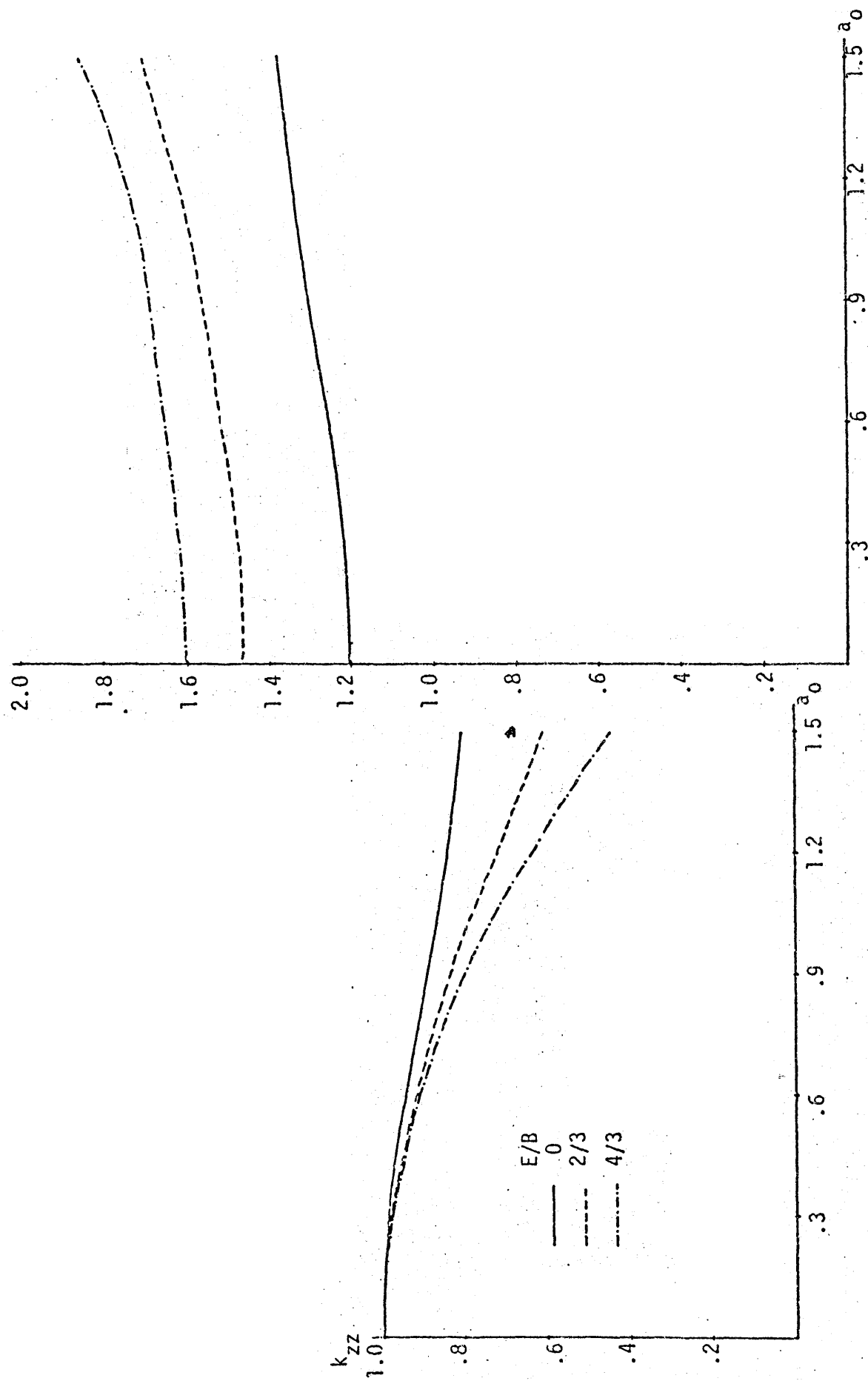


Figure 39 - Vertical Stiffness Coefficients. Rectangular Foundations. $A = 2B$.

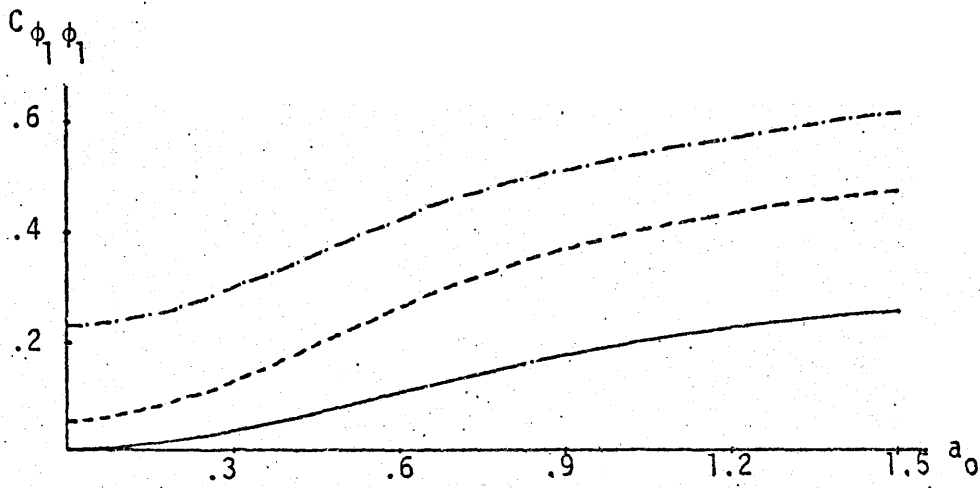
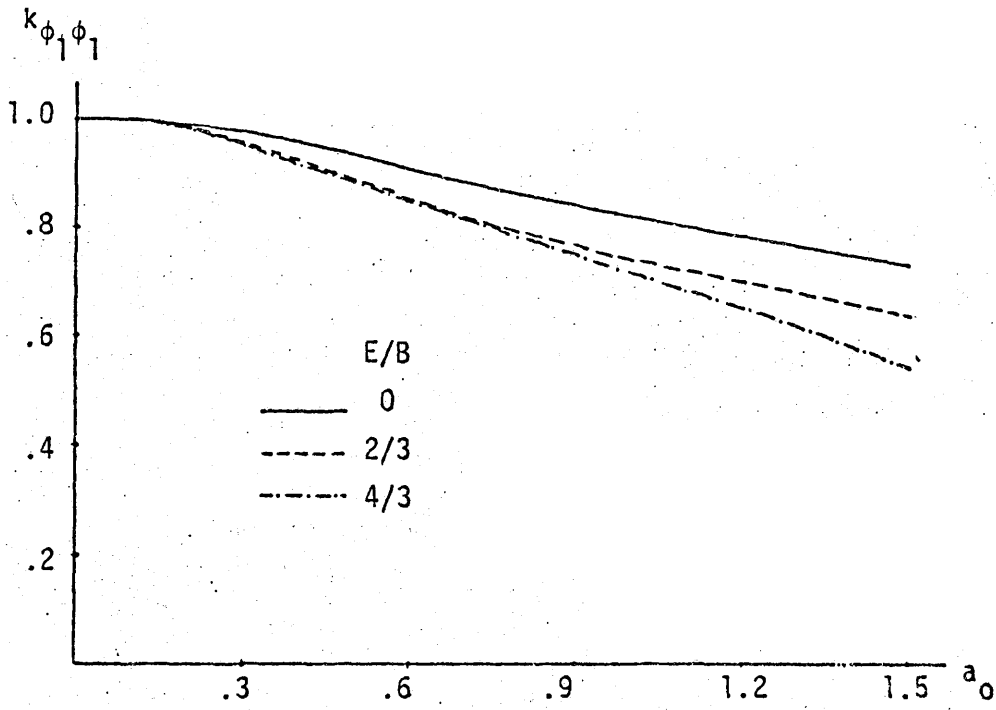


Figure 40 - Rocking Stiffness Coefficients. Rectangular Foundations. $A = 2B$.

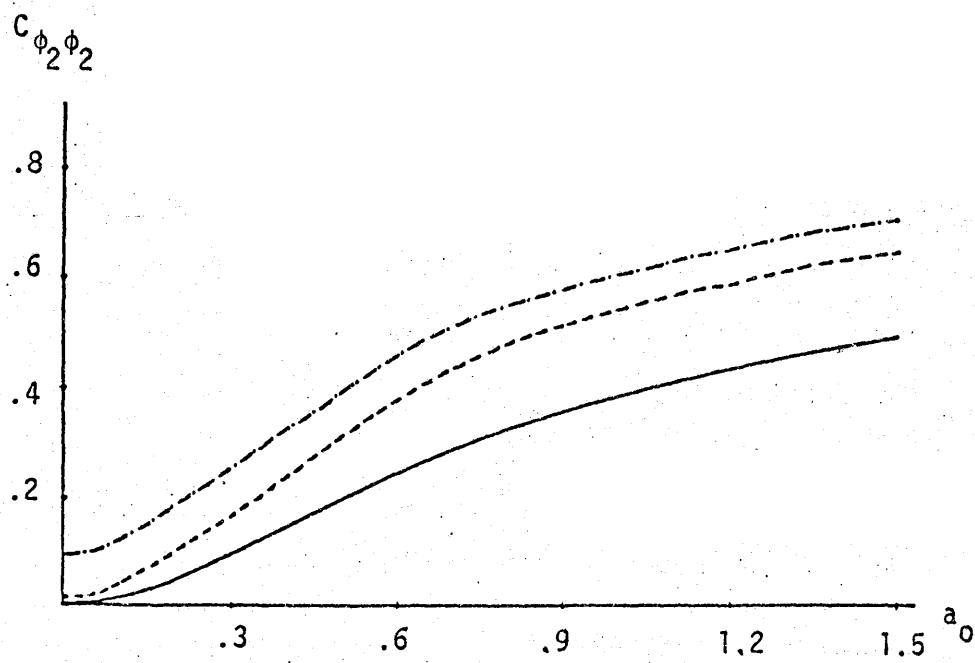
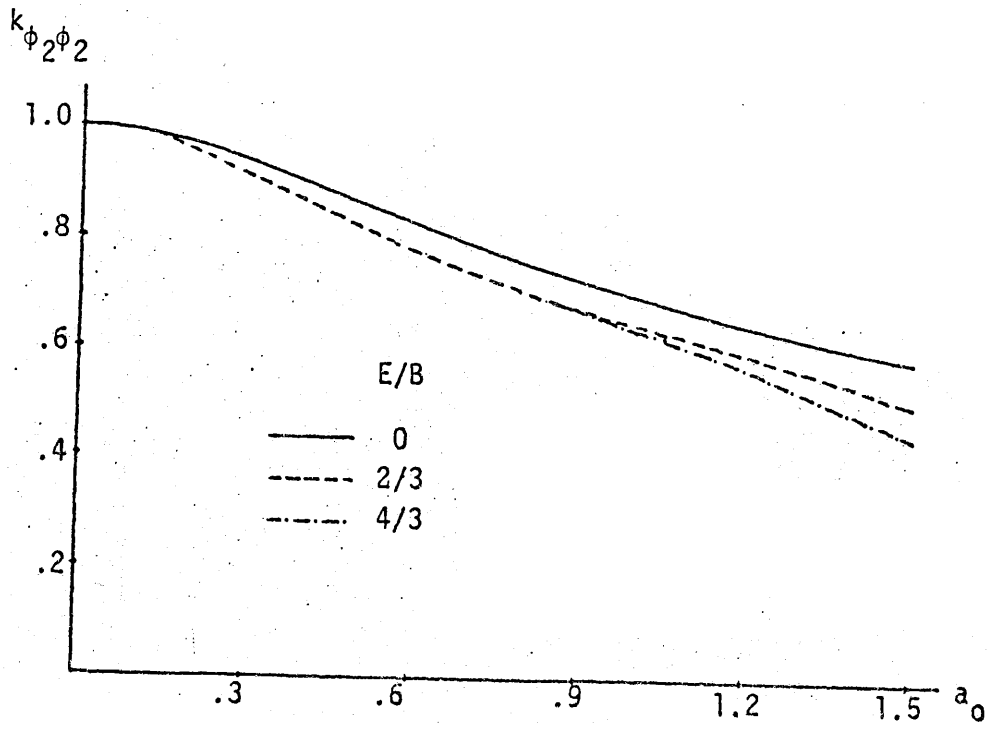


Figure 41 - Rocking Stiffness Coefficients.
Rectangular Foundations. $A=2B$.

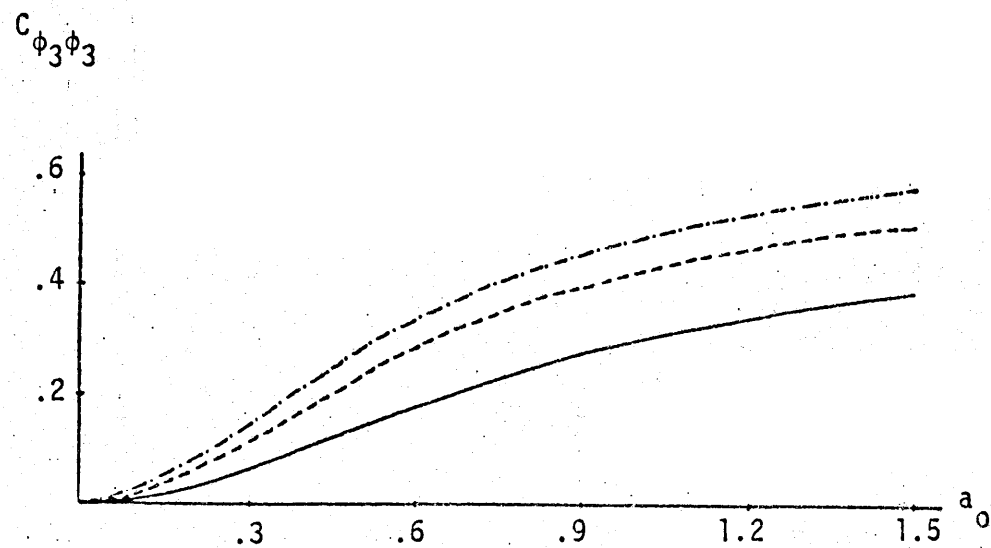
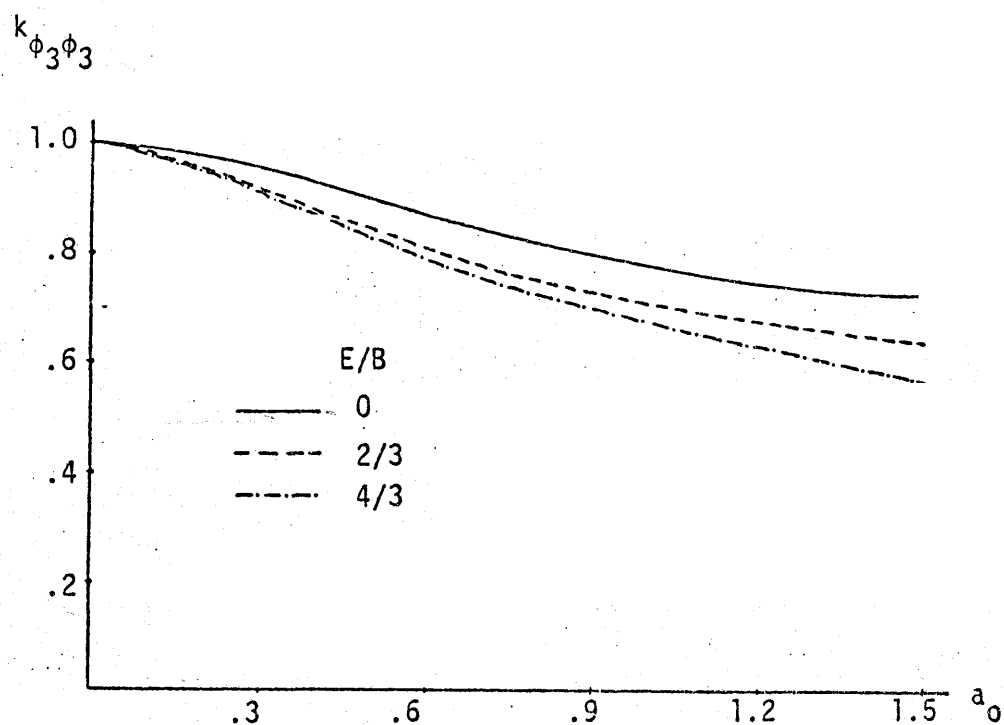


Figure 42' - Torsional Stiffness Coefficients.
Rectangular Foundations. $A = 28$.

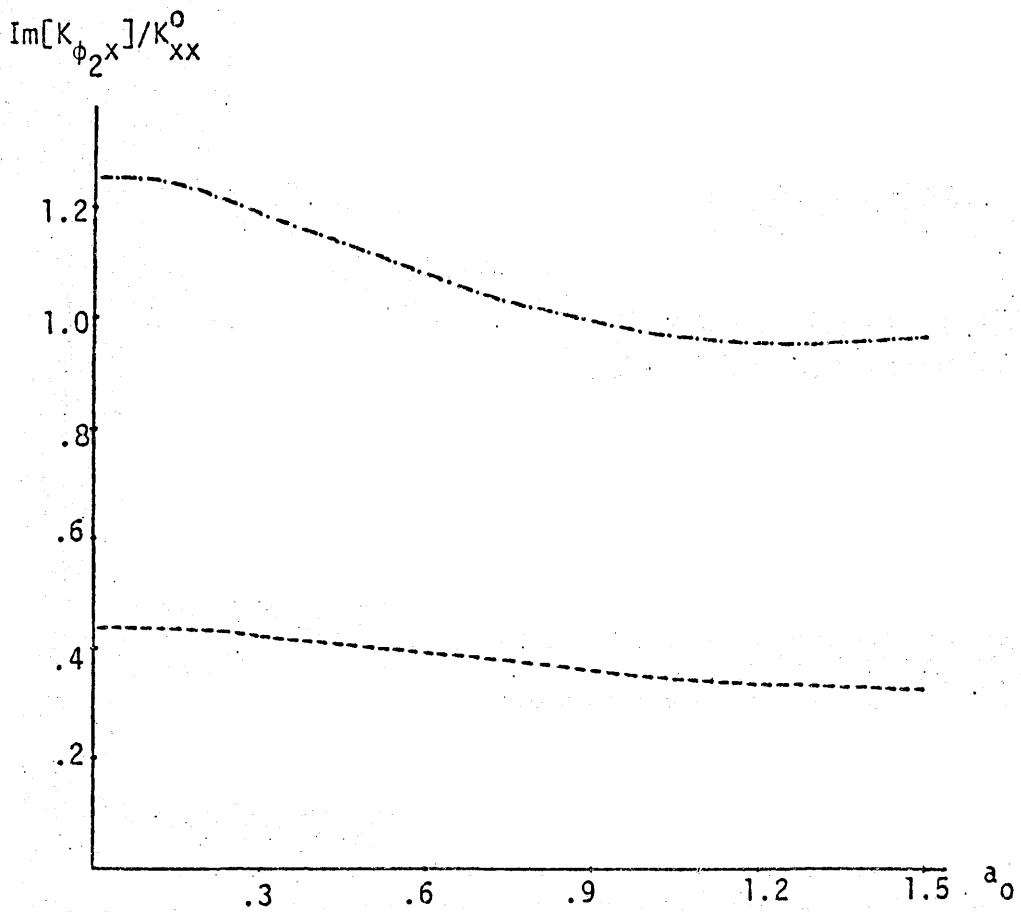
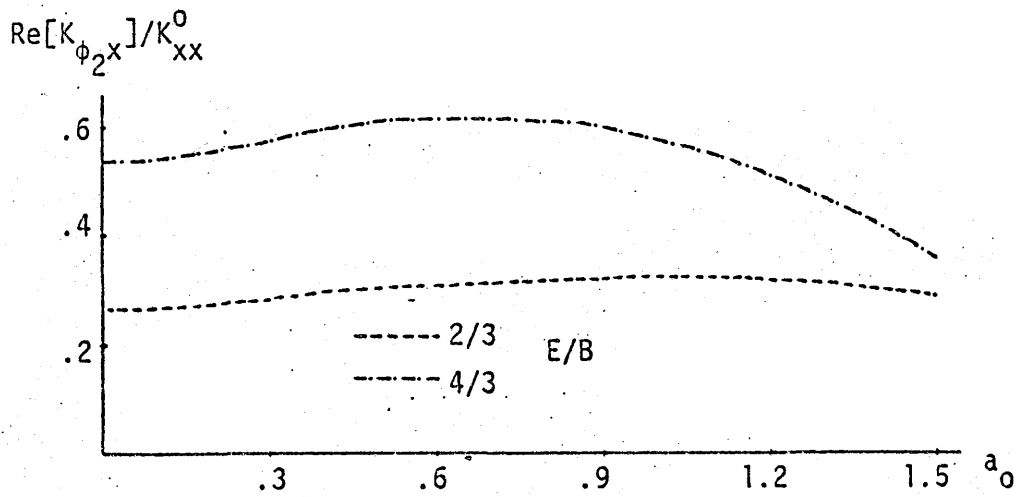


Figure 43 - Cross Coupling Stiffness. Rectangular Foundation. $A = 2B$.

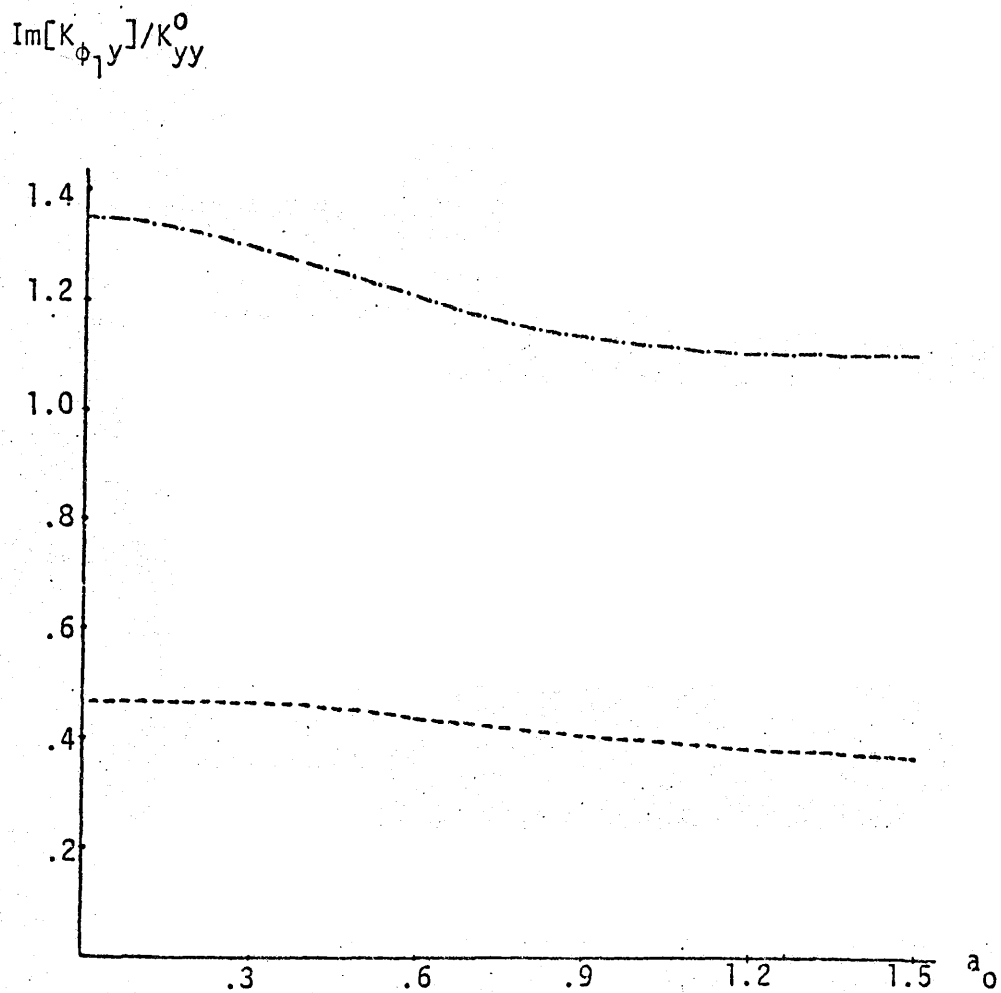
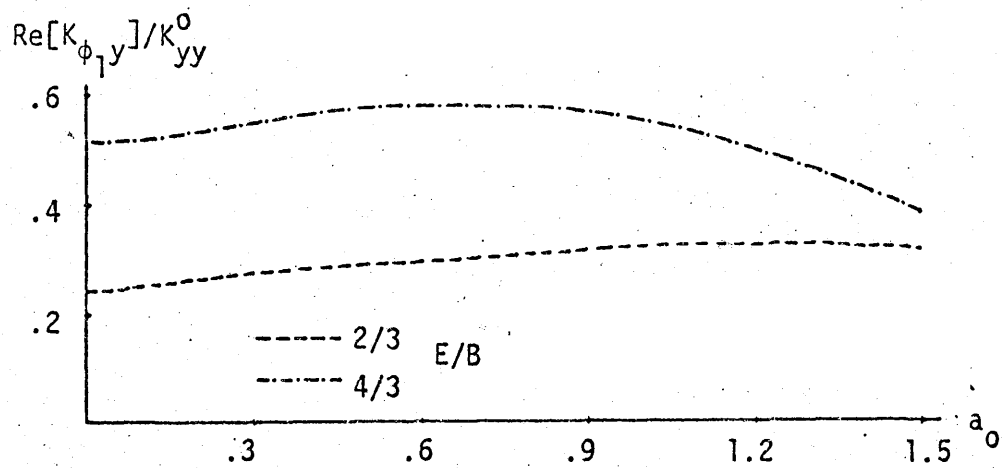


Figure 44 - Cross Coupling Stiffness. Rectangular Foundations. $A = 2B$.

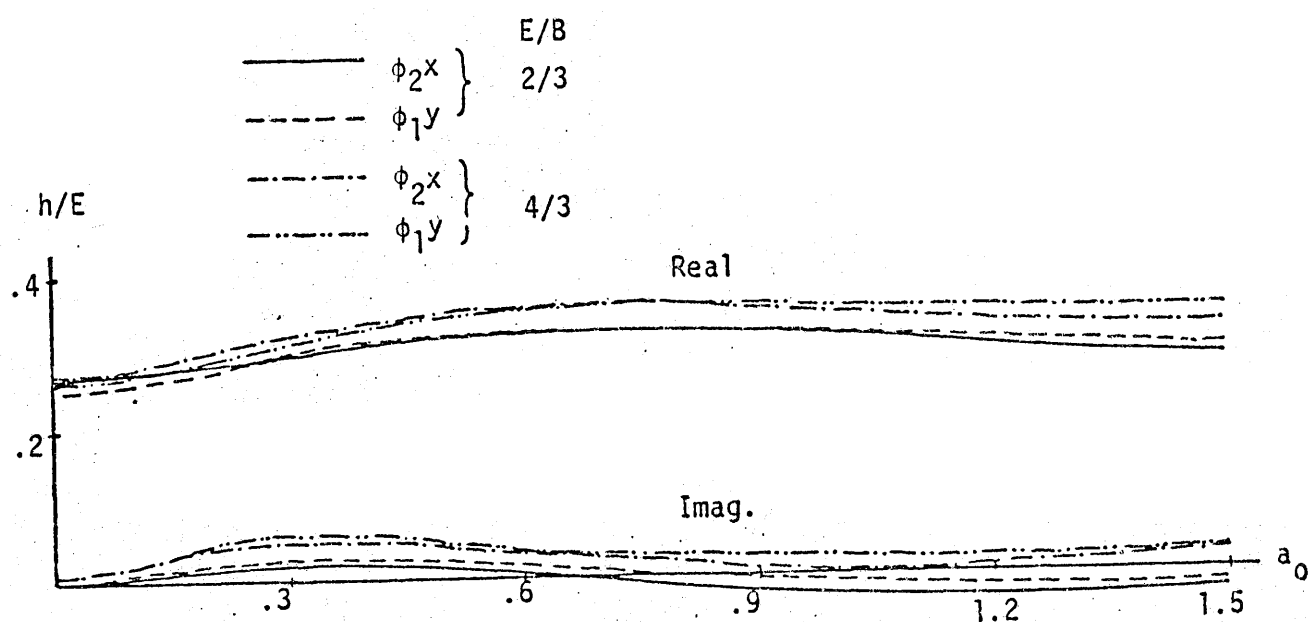
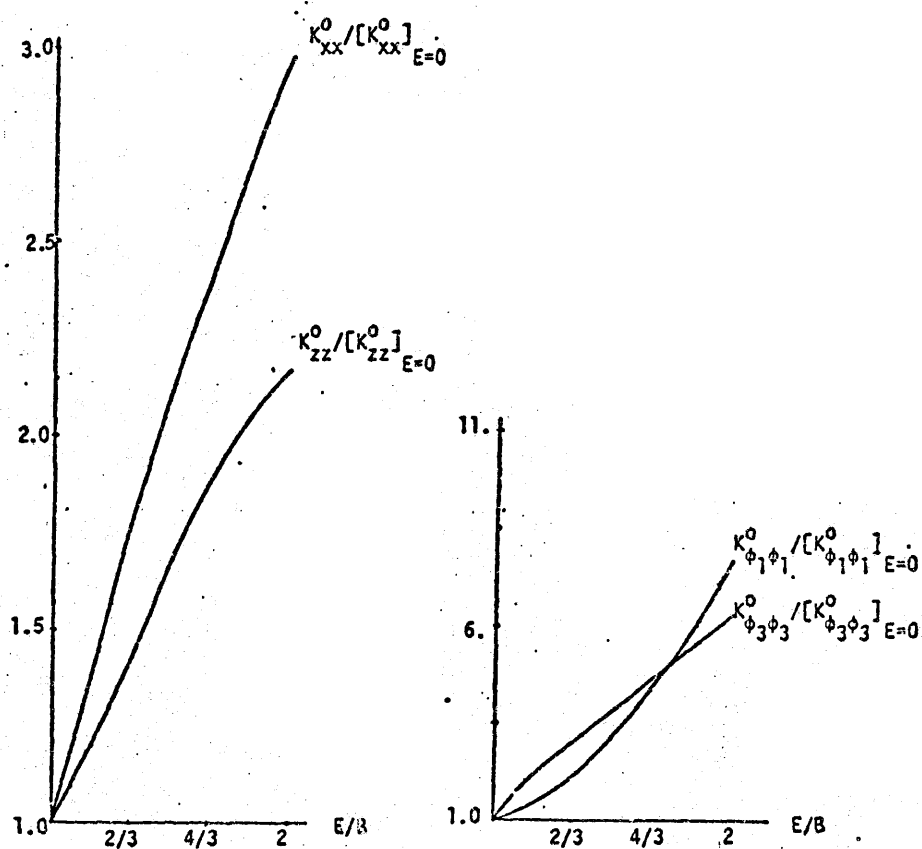


Figure 45 - Height of the Center of Stiffness.
Rectangular Foundation. $A = 2B$.

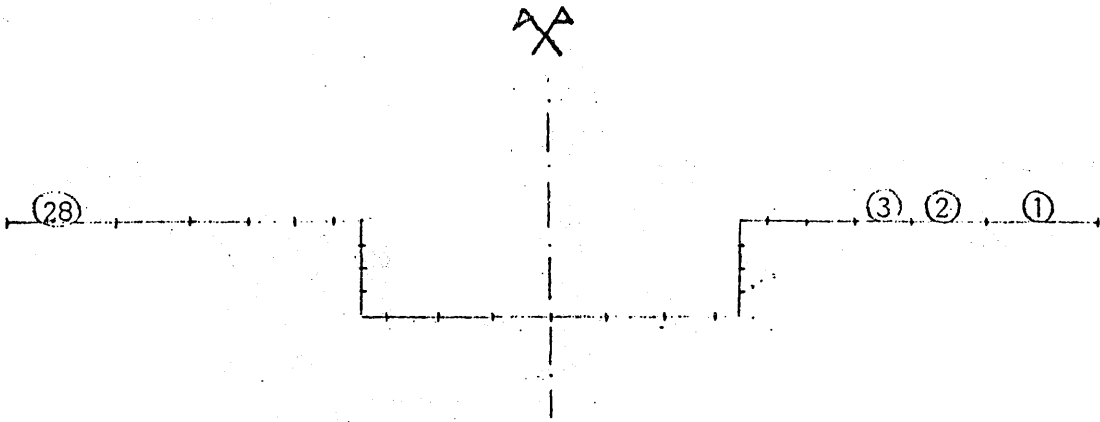
Quando se disponga de otra información puede utilizarse la regla de KAUSEL y ROESSET (1975) que sugieren la independencia de k y c respecto al empotramiento y suponen que pueden ser utilizados los valores correspondientes a zapata superficial modificando solamente el valor de \underline{K} . Para ello pueden utilizarse las siguientes curvas



- Static Stiffness for Embedded Square Foundations

Fig. 46

En el caso de carga en faja nuevamente se obtienen buenos resultados con el B.I.E.M. Un ejemplo es el de la Fig. 47 extraído de una memoria de Alarcón et al. (1978)



BOUNDARY DISCRETIZATION
EMBEDDED STRIP FOUNDATION

$$C_s = 1 \quad \rho = 1$$

$$C_p = 2 \quad E/B = 0.5$$

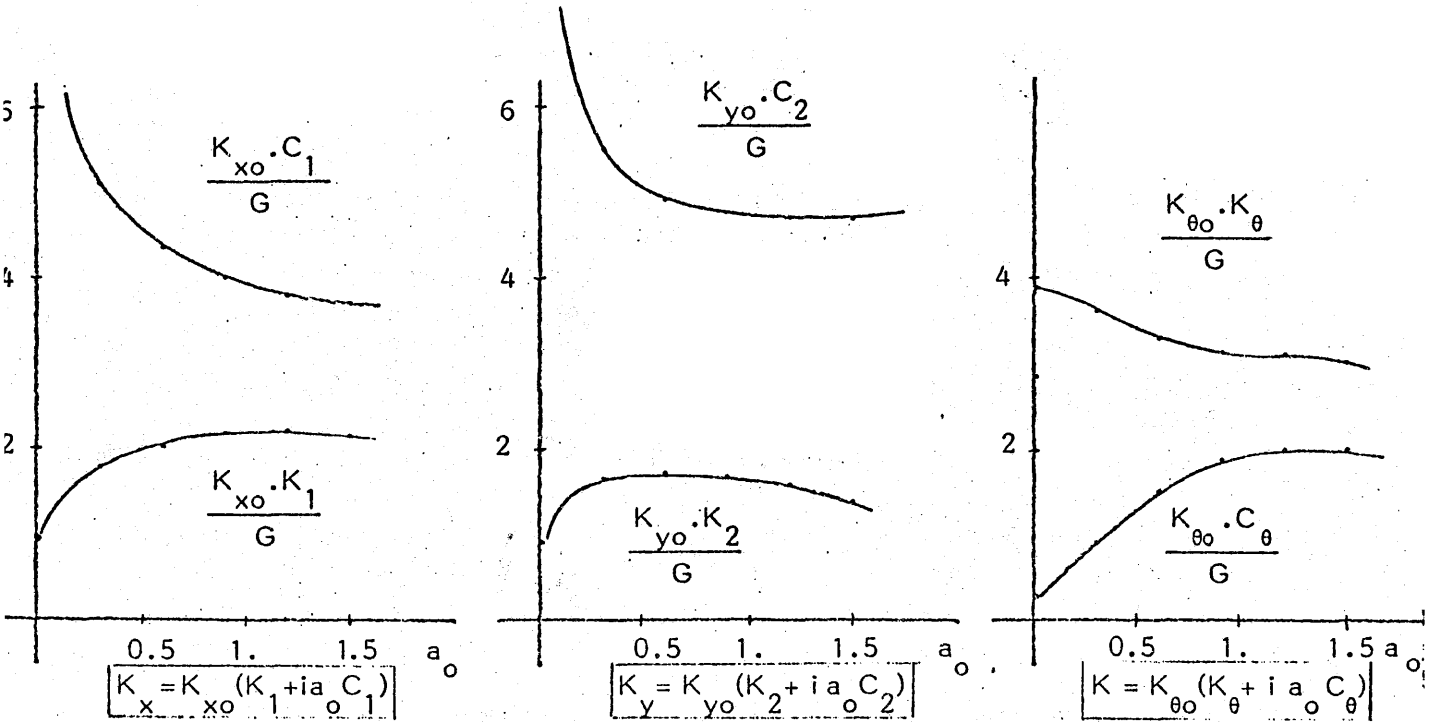
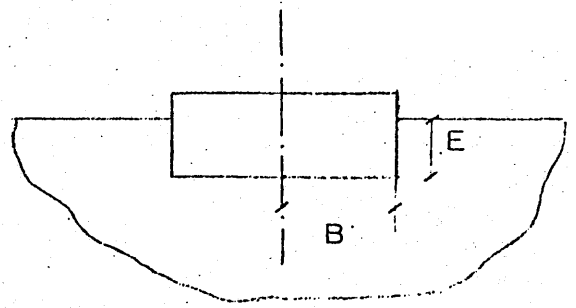


Fig. 47

2.-EL CASO VISCOELASTICO. AMORTIGUAMIENTO MATERIAL

2.1.-- Algunos conceptos previos

Como es bien sabido el amortiguamiento se manifiesta mediante una progresiva disminución de las amplitudes del movimientos reflejando la pérdida de energía por rozamiento, calor o transmisión en forma de ondas sonoras.

Existen diversos mecanismos de amortiguamiento no siendo extraño que varios de ellos actúen simultáneamente. Los mas conocidos son los siguientes

- | | | |
|---|---|---|
| I Amortiguamiento fluido | { | viscoso: fuerza proporcional a la velocidad.
turbulento: fuerza proporcional al cuadrado de la velocidad |
| II Amortiguamiento coulombiano Fricción en seco. Fuerza constante | | |
| III Amortiguamiento interno, estructural ó histerético:
Fuerza proporcional a la velocidad e inversamente a la frecuencia de vibración | | |

Debido a sus ventajas operativas (linealiza las ecuaciones del movimiento) el modelo mas usado es el amortiguamiento viscoso. Pocos fenómenos naturales pueden equipararse a este comportamiento; entre ellos se suele citar el flujo estacionario de un fluido a través de una ranura, como en los amortiguadores de automóviles; el movimiento de un pistón en un cilindro aceitado o el giro de un eje en sus apoyos. En estos casos la fuerza es proporcional a la viscosidad absoluta del fluido, al área lubricada de contacto y al espesor de la película. Fuera de estos casos particulares el modelo nunca es exacto aunque para pequeñas amplitudes de vibración puede hablarse de amortiguamiento viscoso equivalente. Este fue el esquema seguido, por ejemplo, por Lord RAYLEIGH al asimilar el amortiguamiento producido por el aire y el amortiguamiento estructural en las vibraciones de un diapason.

Para grandes amplitudes el error puede ser muy grande y por ello conviene reconsiderar el problema.

Como es bien sabido el amortiguamiento en un sistema con un grado de libertad, que realiza vibraciones libres

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + k x = 0 \quad (60)$$

se define mediante el índice de amortiguamiento

$$\zeta = \frac{c}{c_{\text{crit}}} = \frac{c}{2\sqrt{km}} \quad (61)$$

o mediante el decremento logarítmico

$$\delta = \ln \frac{A_m}{A_{m+1}} = 2\pi \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (62)$$

Otra forma alternativa consistiría en observar la energía disipada por ciclo, esto es

$$U = \int_0^T c \dot{x}^2 dt$$

En una vibración de frecuencia ω

$$\dot{x} = \omega$$

luego

$$/ c \dot{x}^2 / = c \omega^2 x_o^2$$

donde x_o es el módulo del vector x .

Por otro lado el vector \dot{x} debe girar un período. Si se toma la parte real (o la imaginaria) elevada al cuadrado y se integra en el resultado es

$$\frac{T}{2} = \frac{\pi}{\omega}$$

Así pues

$$\Delta U = \frac{\pi}{\omega} c \omega^2 x_o^2 = c \pi \omega x_o^2 \quad (63)$$

En el caso de un muelle en serie con un amortiguador (solido de Maxwell) se obtiene una representación muy gráfica si se elimina la componente - angular en la siguiente forma:

movimiento: $x = x_0 e^{i\omega t}$

fuerza : $f = c \dot{x} = i c x_0 \omega e^{i\omega t}$

$$\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \left(\frac{f}{c x_0 \omega}\right)^2 = 1$$

(1+i)

En un diagrama (x,f) esta ecuación es una elipse de semiejes $a = x_0$, $b = c x_0 \omega$ y por tanto de área

$$\pi ab = \pi c \omega x_0^2 = \Delta U$$

Así pues la energía disipada viene representada por el área contenida en el interior de la elipse en el diagrama carga deformación.

Cuando el muelle y el amortiguamiento están en paralelo (sólido de - - VOIGT) la situación es semejante ΔU sigue dada por las fórmulas anteriores (pues la energía sólo se disipa en el amortiguador) y la elipse tiene sus ejes inclinados pues

movimiento: $x = x_0 e^{i\omega t}$

fuerza : $f = c \dot{x} + k x$

$$\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \left(\frac{f - kx}{c x_0 \omega}\right)^2 = 1$$

Otra forma de representar el amortiguamiento en forma gráfica consistiría en analizar el desfase producido entre la fuerza actuante y el correspondiente desplazamiento.

Como

$$f = c \dot{x} + k x$$

si $f = f_0 e^{i\omega t}$ y $x = H(\alpha) f_0 e^{i\omega t}$

$$1 = (c i \omega + k) H \rightarrow H = \frac{1}{k + i \omega c} = \frac{k - i \omega c}{k^2 + \omega^2 c^2}$$

Es decir, la función de transferencia tiene un modulo

$$|H| = \frac{1}{\sqrt{k^2 + \omega^2 c^2}}$$

y un ángulo de fase $-\delta_L$, tal que

$$\operatorname{tg} \delta_L = \frac{\omega c}{k}$$

Así pues

$$x = \frac{1}{H} e^{-i\delta_L} f_o e^{i\omega t} = \frac{f_o}{H} e^{i(\omega - \delta_L)t}$$

El movimiento va en retraso respecto a la fuerza y su modulo

$$x_o = \frac{f_o}{H} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{f_o}{\sqrt{k^2 + \omega^2 c^2}} \\ \frac{f_o}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta}} \end{array} \right\} = \frac{f_o}{k} \cos \delta_L \quad (64)$$

Logicamente si el amortiguamiento es pequeño $\cos \delta \approx 1$ y recaemos en el caso elástico

$$x_o = \frac{f_o}{k}$$

Una relación entre el defase y la energía perdida por ciclo se puede obtener si se normaliza ésta respecto a la amplitud máxima. Para ello se define el amortiguamiento específico como la relación entre la energía perdida a la anergia máxima en el caso elástico.

$$U = \frac{1}{2} k x_o^2$$

Así pues el amortiguamiento específico

$$\psi = \frac{\Delta U}{U} = \frac{\pi c \omega x_o^2}{\frac{1}{2} k x_o^2} = 2 \pi \frac{c}{k} \omega = 2 \pi \operatorname{tg} \delta_L \quad (65)$$

pudiendo visualizarse también como cociente de áreas.

Finalmente para pequeños valores de ζ .

$$[\delta = 2 \pi \zeta = 2 \pi \frac{c}{2 \sqrt{k m}} = 2 \pi \frac{c \omega}{2 k} = \pi \operatorname{tg} \delta_L] \quad (66)$$

Según dijimos el amortiguamiento viscoso no es precisamente un buen modelo para casos donde, como el suelo, es muy importante el tipo estructural. La diferencia radica principalmente en el hecho de que la energía perdida por amortiguamiento viscoso crece con la frecuencia. Para sólidos el amortiguamiento estructural refleja el flujo de calor entre zonas comprimidas y dilatadas durante el movimiento y, cuando la frecuencia aumenta, no hay tiempo para que dicho flujo se establezca por lo que el amortiguamiento disminuye con la frecuencia, en contra de lo especificado para el tipo viscoso.

Un modelo conveniente consiste en tomar

$$c \omega = h = \text{cte}$$

donde h es el coeficiente de amortiguamiento estructural.

En estas condiciones las fórmulas anteriores corregidas producen

$$\begin{aligned} f &= k x + \frac{h}{\omega} \dot{x} \\ \Delta U &= \pi h x_o^2 \\ \zeta &= \frac{h}{2k} \\ \sigma &= \pi \frac{h}{m \omega_d^2} \approx \pi \frac{h}{k} \\ \psi &= \frac{\Delta U}{U} = 2 \pi \frac{h}{k} \end{aligned}$$

En cuanto a la elipse representativa en el diagrama cargas-deformación se tendría

$$\left(\frac{x}{x_o} \right)^2 + \left(\frac{f - k x}{h x_o} \right)^2 = 1$$

La intersección con el eje s sería el punto $(d, 0)$ tal que

$$d^2 \left[1 + \left(\frac{k}{h} \right)^2 \right] = x_o^2$$

es decir

$$\left(\frac{k}{h}\right)^2 = \left(\frac{x_o^2 - d^2}{d^2}\right)$$

y por tanto

$$\frac{h}{k} = \sqrt{\frac{d}{x_o^2 - d^2}} \approx \frac{d}{x_o} \quad (67)$$

en los casos en que el amortiguamiento no es muy grande.

Una estimación del amortiguamiento específico salvo el factor 2π se obtiene pues dividiendo la abscisa en el origen por el desplazamiento máximo.

Finalmente cabe indicar que en el caso de movimiento oscilante

$$\dot{x} = i \omega x$$

por lo que

$$f = kx + \frac{h}{\omega} \dot{x} = (k + i h) x \quad (68)$$

lo que justifica el nombre de rigidez compleja con que, a veces, se denomina el amortiguamiento estructural.

RELACION ENTRE LAS MAGNITUDES QUE DEFINEN EL AMORTIGUAMIENTO.

CASO VISCOZO

Indice de amortiguamiento

$$\zeta = \frac{c}{c_{\text{crit}}} = \frac{c}{2\sqrt{km}} = \frac{c}{2k} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \delta_L$$

Decremento logarítmico

$$\delta = \ln \frac{A_n}{A_{n+1}} = 2\pi \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \approx 2\pi\zeta = \pi \operatorname{tg} \delta_L$$

Angulo de pérdidas

$$\operatorname{tg} \delta_L = \frac{\omega c}{k} = 2\zeta \approx \frac{\delta}{\pi}$$

Energía perdida por ciclo $\Delta U = c \pi \omega x_0^2$

Amortiguamiento específico

$$\psi = \frac{\Delta U}{U} = 2\pi \frac{c \omega}{k} = 2\pi \operatorname{tg} \delta_L = 4\pi\zeta \approx 2\delta$$

CASO HISTERETICO

Semejante al anterior poniendo

$$c \omega = h$$

2.2.--Amortiguamiento interno de suelos.

Los valores de amortiguamiento interno que se manejan para suelos se han obtenido, en general, a partir de ensayos en laboratorio, pues en el caso de ensayos in situ es preciso descontar los efectos del amortiguamiento por radiación y de la dispersión geométrica.

Los resultados de columna resonante parecen indicar un amortiguamiento de tipo histerético. Sin embargo el lazo de histéresis no es elíptico y el amortiguamiento específico depende de la amplitud de la deformación según se indica en las figuras donde los valores se expresan en función del índice de amortiguamiento ζ .

Por ello se suelen utilizar diferentes métodos para diferentes amplitudes.

En general, cuando se habla de vibraciones del semiespacio se usa la ley

$$\tau = (G + i \omega G') \gamma \quad (69)$$

donde G' es el módulo viscoso de rigidez, de modo que

$$\psi = 2\pi \frac{\omega G'}{G} = 2\pi \operatorname{tg} \delta_L \quad (70)$$

$$\operatorname{tg} \delta_L = \frac{\omega G'}{G} \quad (71)$$

Para los valores de deformación que se encuentran bajo cimientos de máquinas RICHART et al (1970) indican que el decremento logarítmico

$$\delta = \pi \operatorname{tg} \delta_L \quad (72)$$

es menor de 0.2, de modo de $\omega G'$ es del orden del 6% de G y puede despreciarse en los cálculos.

VELETSOS y VERBIC (1973) indican también que en estos casos

$\psi \leq 0.1\pi$, mientras que para las mayores deformaciones asociadas con los terremotos $\psi \sim 0.6\pi$ ó 0.8π

Con la hipótesis anterior, los citados autores aprovecharon para obtener fórmulas correspondientes a semiespacios viscoelásticos, transformando sus expresiones polinómicas, para medios elásticos, mediante

el "principio de correspondencia".

Este principio establece que basta sustituir el módulo de la solución -- elástica por el módulo complejo para obtener los resultados.

Así en

$$Q = K (k + i a_o c) \quad (73)$$

$$k \text{ contiene a } G \text{ y } a_o = \frac{\omega r}{\sqrt{G}} \sqrt{\frac{\rho}{G}}$$

Como

$$G \rightarrow \tilde{G} = G (1 + i \operatorname{tg} \delta_L) \quad (74)$$

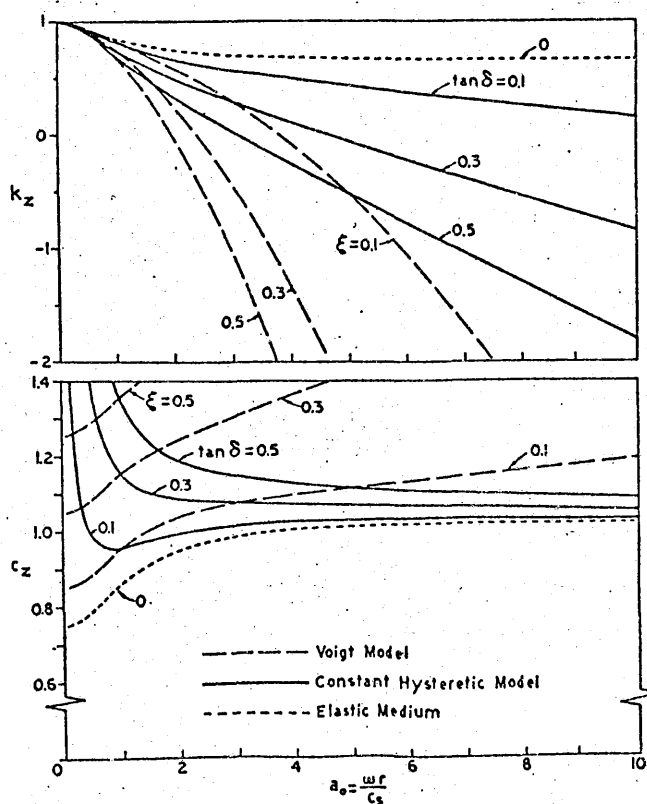
basta sustituir

$$K \rightarrow K (1 + i \operatorname{tg} \delta_L) = K$$

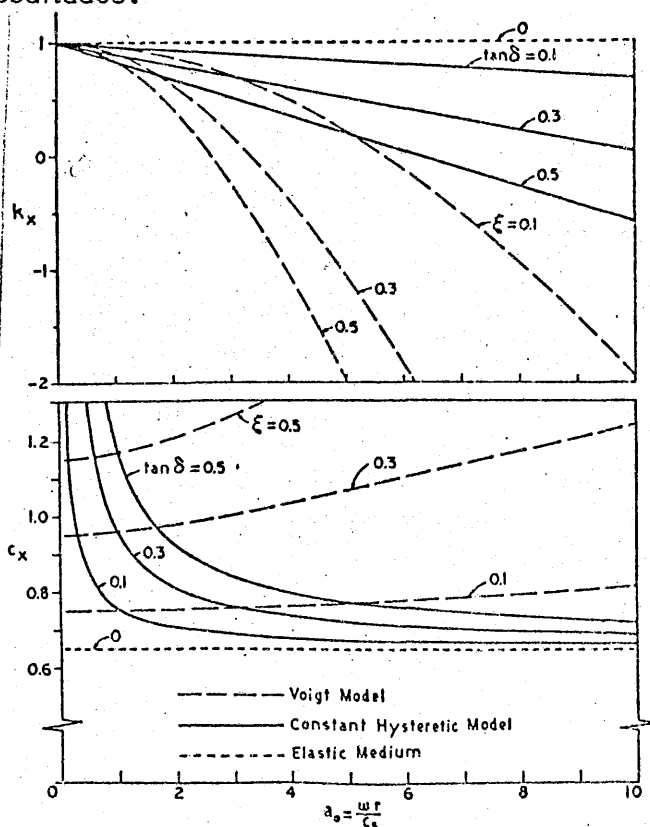
$$a_o \rightarrow \tilde{a}_o = \frac{1}{1 + i \operatorname{tg} \delta_L} a_o \quad (75)$$

y agrupar partes real e imaginaria para obtener las siguientes fórmulas donde $\epsilon = \frac{1}{a_o} \operatorname{tg} \delta_L$ y α, β, γ son los valores de los medios -- elásticos

Las figuras siguientes recogen algunos resultados.



Values of k_z and c_z for viscoelastic medium with $\nu = \frac{1}{2}$



Values of k_x and c_x for viscoelastic medium with $\nu = \frac{1}{2}$

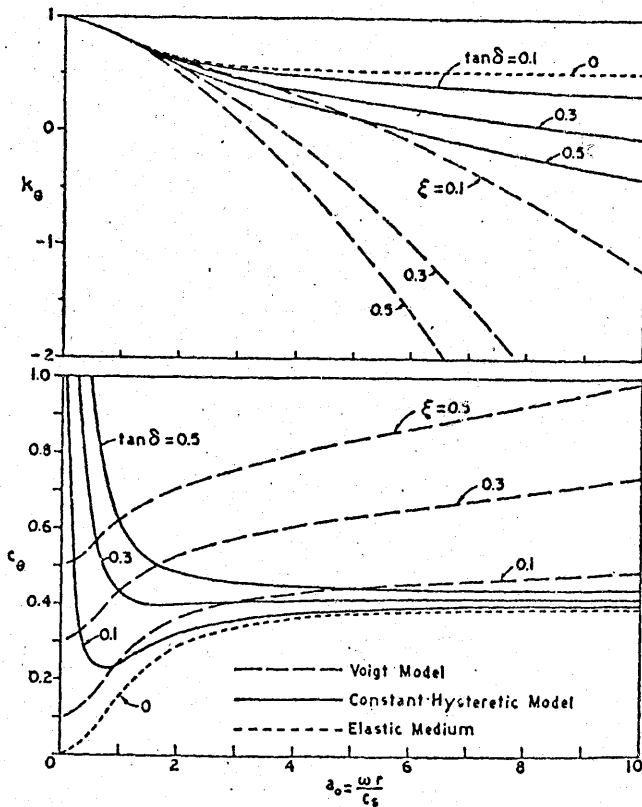
$$\epsilon = \frac{c}{r_o} \frac{G'}{G}$$

RIGIDEZ Y AMORTIGUAMIENTO EN EL CASO VISCOELASTICO
VELETSOS Y VERBIC (1973)

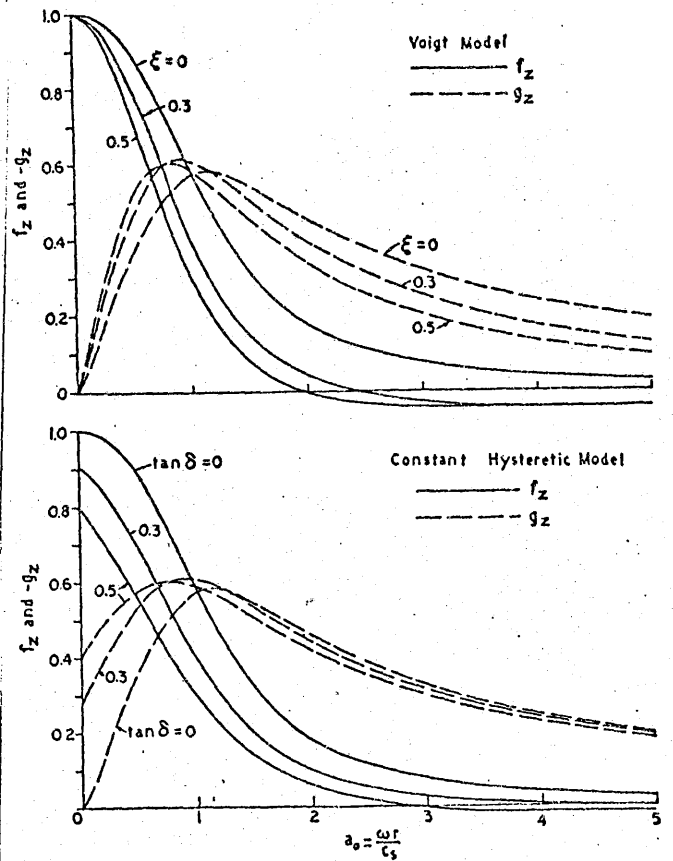
OSCILACIONES	k_i^v	c_i^v	OBSERVACIONES
VERTICALES	$1 - x_z - \sqrt{\frac{1}{2}(R-1)} \gamma_4 a_o - \gamma_3 a_o^2$	$\sqrt{\frac{1}{2}(R+1)} \gamma_4 + \psi_z + \epsilon$	$R = \begin{cases} 1 + a_o^2 \epsilon^2 \\ 1 + \text{tg}^2 \delta_L \end{cases}$ $x_z = \frac{\gamma_1 \left\{ R + \sqrt{\frac{1}{2}(R-1)} \gamma_2 a_o \right\} (\gamma_2 a_o)^2}{R + 2 \sqrt{\frac{1}{2}(R-1)} \gamma_2 a_o + (\gamma_2 a_o)^2}$ $\psi_z = \frac{\gamma_1 \gamma_2 \sqrt{\frac{1}{2}(R+1)} (\gamma_2 a_o)^2}{R + 2 \sqrt{\frac{1}{2}(R-1)} \gamma_2 a_o + (\gamma_2 a_o)^2}$
HORIZONTALES	$1 - \sqrt{\frac{R-1}{2}} \alpha_1 a_o$	$\sqrt{\frac{R+1}{2}} \alpha_1 + \epsilon$	$R = \begin{cases} 1 + a_o^2 \epsilon^2 \\ 1 + \text{tg}^2 \delta_L \end{cases}$
DE GIRO	$1 - x_\theta - \beta_3 a_o^2$	$\psi_\theta + \epsilon$	x_θ y ψ_θ tienen las mismas expresiones que x_z y ψ_z sustituyendo las γ_i por las β_i

Un método de aplicación del principio de correspondencia que parece muy prometedor es el presentado por DASGUPTA y SACKMAN (1976) donde se indica la posibilidad de aplicación a series numéricas obtenidas por aplicación de métodos de discretización como el método de los elementos finitos o cualquier otro.

Igualmente CHOPRA y DASGUPTA (1976, 1979) han presentado matrices dinámicas de rigidez para semiplanos viscoelásticos.



Values of k_θ and c_θ for viscoelastic medium with $\nu = \frac{1}{2}$



Values of f_z and g_z for viscoelastic medium with $\nu = \frac{1}{2}$

83
RICHART, HALL, WOODS: "Vibrations of Soils and Foundations".
1970 Prentice Hall.

REISSNER: "Stationäre, axialsymmetrische durch eine Schüttelnde Masse erregte
1936 Schwingungen eines homogenen elastischen Halbraumes". Ingenieur
Archiv. Vol 7. Part. 6

LAMB: "On the propagation of temors over the Surface of an elastic solid".
1904 Phil. Trans. Royal Society. London

SHEKTER: "Considerations of Inertial Properties of Soil in the Computations of
1948 vertical forced vibrations of massive foundations" NII, Symposiun 12.
Vibratsii Osnavaniy i Fundamentov. Moscu (Referencia de Barkan)

QUINLAN: "The elastic theory of soil dynamics". Symp. Dyn. Test. Soils.
1953 ASTM STP & N_o 156.

SUNG: "Vibrations in Semi-Infinite Solids due to Periodic Surface Loadings".
1953 Sym. Dyn. Test. Soils. ASTM. STP N_o 156

BRYCROFT: "Forced vibrations of a rigid circular plate on a semi-infinite elastic
1956 space and on a elastic stratum". Phil. Trans. Royal Society. London

RICHART: "Foundation vibrations". Transactions ASCE. Vol. 127. Part. 1
1962

HSIEH: "Foundation Vibrations". Proc. Inst. Civ. Eng. Vol 22
1962

TIMOSHENKO & GOODIER : "Theory of Elasticity". Mac-Graw Hill
1954

LYSMER: "Vertical Motion of Rigid Footings". Dep. Civ. Eng. Univ.
1965 Michigan. Ph. D. Disertation.

RICHART & LYSMER: "Dynamic response of footings to vertical loading".
1966 Proc. ASCE, 92, SM 1.

VELETSOS, WEI: "Lateral and rocking vibration of footings".
1971 Proc. ASCE, 97, SM 9.

REISSNER y SAGOCI: "Forced torsional oscillations of an elastic half-space".
1944 J. of Appl. Phys. vol 15.

LUCO y WESTMANN: "Dynamic response of circular footings".
1971 Proc. ASCE, 97, E.M. 5

KERASUDHI, KEER, LEE : "Vibratory motion of a body on an elastic half plane"
1968 Jour. App. Mec. Trans. ASME Vol 35, Ser. E. No 4

- AWOJOBI & GROOTENHUIS : "Vibration of rigid bodies on semi-infinite elastic -
1965 media". Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. Vol. 827
- ALARCON, DOMINGUEZ, DEL CAÑO: "Dynamic Soil Stiffness form Embedded Foun-
1978 dations in linear media". 2nd. Int. Conf. on
Microzonation. San Francisco.
- LUCO: "Impedance Functions for a Rigid Foundation on a Layered Medium".
1974 Nu. Eng. & Design.
- JAKUB: "Dynamic stiffness of foundations" Rep. No. R 77-36 MIT
1977
- ALARCON, DOMINGUEZ, DEL CAÑO: "Dynamic Soil Stiffness form Embedded Foun-
1979 dations in linear media". 2nd. Int. Symp. on
Innovative num. analysis in appl. Eng. Scien.
Ecole Polytechnique. Montreal.
- KOROB: "Dynamical Response of Rectangular Foundations on a Elastic Half-space"
1962 Proc. Jap. Nat. Symp. on Earth Eng.
- ELORDUY, NIETO & SZEKELY: "Dynamic response of bases of arbitrary Shape subje-
1967 cted to periodic vertical loading". Proc. Inst. Symp.
on Wave propag. and Dyn. Prop of Earth Mat. Albur-
querque N.M.
- WONG y LUCO: "Dynamic Response of rigid Foundations of arbitrary Shape Earth".
1976 Eng. & Struc. Dy. 4.
- DOMINGUEZ: "Dynamic stiffness of rectangular foundations"
1978 Report. No. R 78-20, MIT
- STERNBERG & EUBANKS: "On Strees functions for elastokanetic and the integration
1957 of the repeated wave equation". Quart. Appl. Math. 15
- DOYLE: "Integration of the Laplace Tranformed Equations of classical elastokinetics"
Jour. Math. Anal. & App. 13
- CRUSE & RIZZO: "A direct formulation and numerical solution of the general transient
1968 elastodynamic Problem". 11 Journal of Math Anal. App. 22
- WHITMAN: "Analysis of soil-structure Interaction a state-of-the-art Review".
1972 Soils Publication. No. 300, MIT
- NOVAK: "Effect of soil on structural response to wind and earthquake". Earthquake
1974 Engineering and Struc. Dyn. Vol 3, 79-96
- NOVAK Y SACHS: "Torsional and complred vibrations of embeded footings". Int. Jour.
E.E. & S.D. Vol 2.
- KAUSEL: "Forced vibrations of circular foundations on layered Media".
1974 Rep. R. 74-11 Civ. Eng. Dep. MIT

85
VELETSOS Y VERBIC: "Vibration of viscoelastic foundations".
1973 E.E.S.D. Vol 2.

DASGUPTA Y SACKMAN: "An alternative Representation of the Elastic-Viscoelastic correspondence Principle for Harmonic oscillations". Jour. of App. Mech. American Soc. of Mech. Eng. , Vol 44 Ser. E, pp. 57-60
1977

CHOPRA, CHAKRABARTI Y DASGUPTA: "Dynamic stiffness matrices for viscoelastic half-plane foundations".
1976 Proc. ASCE, EM3, Jun.

KAUSEL, ROESSET & WAAS: "Dynamic Analysis fo Footings on Layered Media".
1975 Jour. of the Engineering Mech. Div. ASCE. Vol. 101, No EMS. pp 679-693

DASGUPTA Y CHOPRA: "Dynamic stiffness matrices for Homogeneous Viscoelastic Half Planes". Vol. 105, No. EMS Proc. ASCE
1975